UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA INFORMATIKY

ENUMERÁCIA DISKRÉTNYCH ŠTRUKTÚR

EDUARD TOMAN

BRATISLAVA 2011

Obsah

Úvod

Predložený text prednášky predstavuje elementárny úvod do teórie enumerácií grafových štruktúr. Na mnohých miestach však poznamenávame, že uvedené prístupy možno aplikovať aj na iných diskrétnych štruktúrach, ako sú grafové.

Teória enumerácií grafových objektov je pomerne búrlivo sa rozvíjajúca časť diskrétnej matematiky.

Je známe, že nemálo úloh vo fyzike, chémii, biológii, ekonómii, štatistike a lingvistike sa transformuje na určenie počtu grafových objektov istých vlastností. Niektoré z takých úloh boli už dávnejšie vyriešené, iné zasa nie sú vyriešené do dnešných dní. Nájsť v explicitnej forme vyjadrenie pre počet zodpovedajúcich objektov sa nám spravidla vždy nepodarí. No na druhej strane, ak použijeme známe enumeračné vety a metódy, môžeme získať celý rad užitočných vzťahov medzi číselnými charakteristikami skúmaných objektov a odhadnúť rádovo niektoré potrebné parametre.

Pri príprave uvedeného textu prednášky veľký kus práce odviedli študenti Peter Kostolányi a František Ďuriš, patrí im za to moje úprimné poďakovanie.

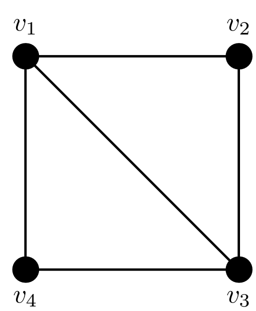
Bratislava 1. mája 2011

Kapitola 1

Enumerácia označených objektov

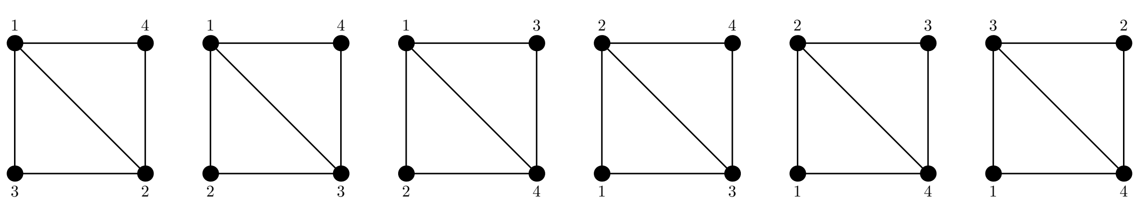
1.1 Počet spôsobov, ktorými môžeme označiť graf

Graf G rádu n sa skladá z konečnej neprázdnej množiny $V = V(G)$, obsahujúcej n vrcholov a množiny E obsahujúcej m neusporiadaných dvojíc rôznych vrcholov. Pri takejto definícii sa automaticky vynechávajú slučky, násobné hrany a orientácia. Dvojica $e = \{u, v\}$ vrcholov, patriaca množine E, sa nazýva hranou grafu G a hovoríme, že hrana e spája vrcholy u a v. Vrcholy u a v sa pritom nazývajú susedné; vrchol u a hrana e a taktiež aj vrchol v a hrana e sú incidentnými navzájom. Graf s n vrcholmi a m hranami sa nazýva (n, m)-grafom.



Obrázok 1.1: Graf so štyrmi vrcholmi a piatimi hranami.

V označenom grafe rádu n sa vrcholom pripisujú celé čísla od 1 po n. Napríklad graf zobrazený na obrázku 1.1 môže byť označený šiestimi rôznymi spôsobmi, ktoré sú ukázané na obrázku 1.2.



Obrázok 1.2: Šesť rôznych rozdelení značiek v grafe.

Takýmto spôsobom, dva označené grafy G_1 a G_2 pokladáme za rovnaké a nazývame izomorfné práve vtedy, keď existuje vzájomne jednoznačné zobrazenie množiny $V(G_1)$ na množinu $V(G_2)$ zachovávajúce nielen susednosť, ale aj rozdelenie značiek. Ľahko sa môžeme presvedčiť o tom, že na obrázku 1.2 sú zobrazené všetky rôzne rozdelenia značiek grafu zobrazeného na obrázku s číslom 1.1.

Vznikajú dve prirodzené otázky. Prvá: „Koľko existuje označených grafov rádu n?" Druhá: „Koľko existuje grafov rádu n?" Prvá otázka je natoľko ľahká, že ju môžeme riešiť ihneď. Druhá otázka je omnoho ťažšia.

Na ľahkú otázku odpovieme tak, že nepatrne zovšeobecníme úlohu nasledujúcim spôsobom: nájsť počet označených grafov s daným počtom vrcholov a hrán. Nech $G_n(x)$ je mnohočlen, u ktorého koeficient pri x^k je rovný počtu označených grafov rádu n, ktoré majú rovno k hrán. Takýto mnohočlen spravidla nazývame generujúca funkcia pre označené grafy s daným počtom vrcholov a hrán. Ak máme množinu V s n-vrcholmi, potom existuje $\binom{n}{2}$ rôznych neusporiadaných dvojíc týchto vrcholov. V každom označenom grafe s množinou vrcholov V je ľubovoľná dvojica vrcholov buď susedná buď nie je susedná. Z toho vyplýva, že počet označených grafov s k hranami je rovný $\binom{\binom{n}{2}}{k}$.

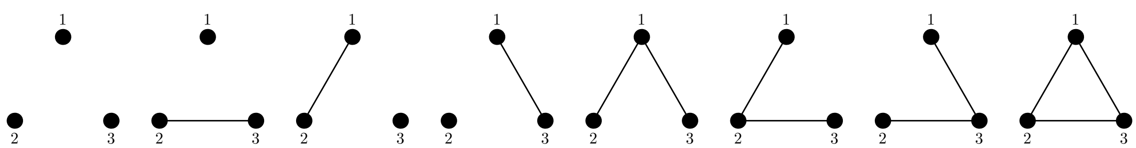
Veta 1.1.1 Generujúca funkcia $G_n(x)$ pre označené grafy rádu n je určená nasledujúcim vzťahom:

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m, \quad \text{kde } m = \binom{n}{2}. \tag{1.1}$$

Pretože $G_n(x) = (1+x)^m$ a počet G_n označených grafov rádu n je rovný $G_n(1)$, platí

$$G_n = 2^{\binom{n}{2}}. \tag{1.2}$$

Pre $n = 3$ túto formulu môžeme ilustrovať obrázkom



Obrázok 1.3: Osem označených grafov tretieho rádu.

Takýmto spôsobom existuje osem označených grafov rádu 3 a len štyri neoznačené grafy rádu 3. Existuje 64 označených grafov rádu 4 a len 11 neoznačených grafov rádu 4.

Teda vzniká otázka: „Koľkými spôsobmi môžeme označiť daný graf?" Aby sme odpovedali na túto otázku, musíme uvažovať symetrie, alebo automorfizmy grafu. Vzájomne jednoznačné zobrazenie α množiny $V(G_1)$ na množinu $V(G_2)$ zachovávajúce susednosť spravidla nazývame izomorfizmom. Ak $G_1 = G_2 = G$, potom α je automorfizmom grafu G. Množinu všetkých automorfizmov grafu G označujeme $\Gamma(G)$ a vieme, že tvorí grupu, ktorú nazývame grupou grafu G. Takýmto spôsobom prvky grupy $\Gamma(G)$ sú permutácie pôsobiace na množine V. Napríklad graf G zobrazený na obrázku 1.1 má práve štyri automorfizmy. To, že $\Gamma(G)$ obsahuje nasledujúce permutácie, zapisujeme spravidla v tvare cyklov:

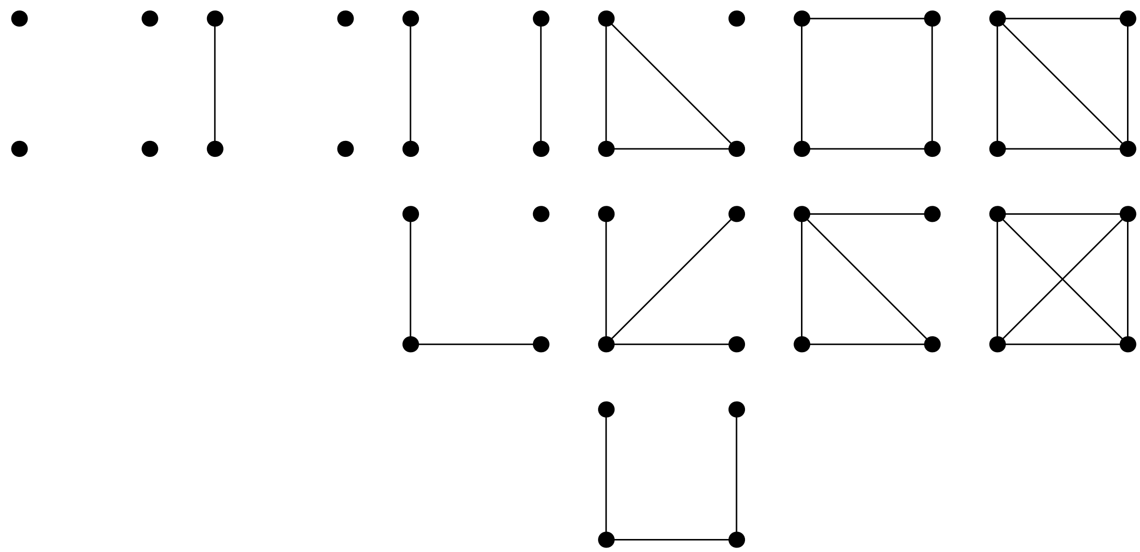
$$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4), \quad (v_1)(v_3)(v_2v_4), \quad (v_1v_3)(v_2)(v_4), \quad (v_1v_3v_2v_4).$$

Nech $s(G) = |\Gamma(G)|$ je rád grupy $\Gamma(G)$, označujúci počet symetrii grafu G. Potom odpoveď na úlohu o počte rozdelení značiek, ktorú sme formulovali vyššie je obsiahnutá v nasledujúcej vete.

Veta 1.1.2 Počet spôsobov rozdelenia značiek v danom grafe G rádu n je rovný

$$l(G) = \frac{n!}{s(G)}. \tag{1.3}$$

Dôkaz. Dôkaz tohto tvrdenia vyplýva z nasledujúcej skutočnosti. Ak máme dané jedno pevné označenie, tak potom z neho môžeme získať $s(G)$ rovnakých označení, inými slovami povedané



Obrázok 1.4: 11 neoznačených grafov štvrtého rádu.

indikuje nám $s(G)$ rovnakých označení. Všetkých označení je $n!$, a teda rôznych označení je $n!/s(G)$. V prípade grafu zobrazeného na obrázku 1.1 máme šesť rôznych označení. □

Hoci uvedená veta je sformulovaná len pre grafy, podobné tvrdenia sú platné pre ľubovoľné konečné diskrétne štruktúry s danými grupami automorfizmov, napríklad také diskrétne štruktúry, ako sú zakorenené grafy, orientované grafy, atď.

Orientovaný graf, alebo orgraf D rádu n sa skladá z konečnej neprázdnej množiny V rôznych objektov, ktoré sa nazývajú vrcholmi spolu so zadanou množinou X, obsahujúcou q usporiadaných dvojíc rôznych vrcholov z množiny V. Dvojica $x = (u, v)$ bodov z množiny X sa nazýva orientovanou hranou grafu D a hovoríme, že vrchol u je susedný s vrcholom v; vrchol u a hrana x sú incidentné navzájom, taktiež aj vrchol v a hrana x. Vonkajší polostupeň vrchola u sa nazýva počet orientovaných hrán vychádzajúcich z vrchola u; vnútorný polostupeň vrchola u je počet orientovaných hrán, ktoré do vrchola u vchádzajú. Diagramy všetkých orientovaných neoznačených grafov rádu 3 sú zobrazené na obrázku 1.5.

Tak ako aj v prípade grafov pracujeme s diagramami orientovaných grafov, tak ako aj so samotnými orientovanými grafmi.

V označených orientovaných grafoch rádu n vrcholom pripisujeme celé čísla od 1 po n a grupa grafu D, označovaná $\Gamma(D)$, sa skladá zo všetkých permutácií množiny vrcholov $V(D)$ orientovaného grafu D zachovávajúcich susednosť. Pretože počet označených orientovaných grafov rádu n, ktoré majú práve k-hrán je rovný $\binom{n(n-1)}{k}$, dostávame nasledujúce výsledky zodpovedajúce formuliam (1.1) a (1.2).

Veta 1.1.3 Generujúca funkcia $D_n(x)$ pre označené orientované grafy rádu n je daná vzťahom

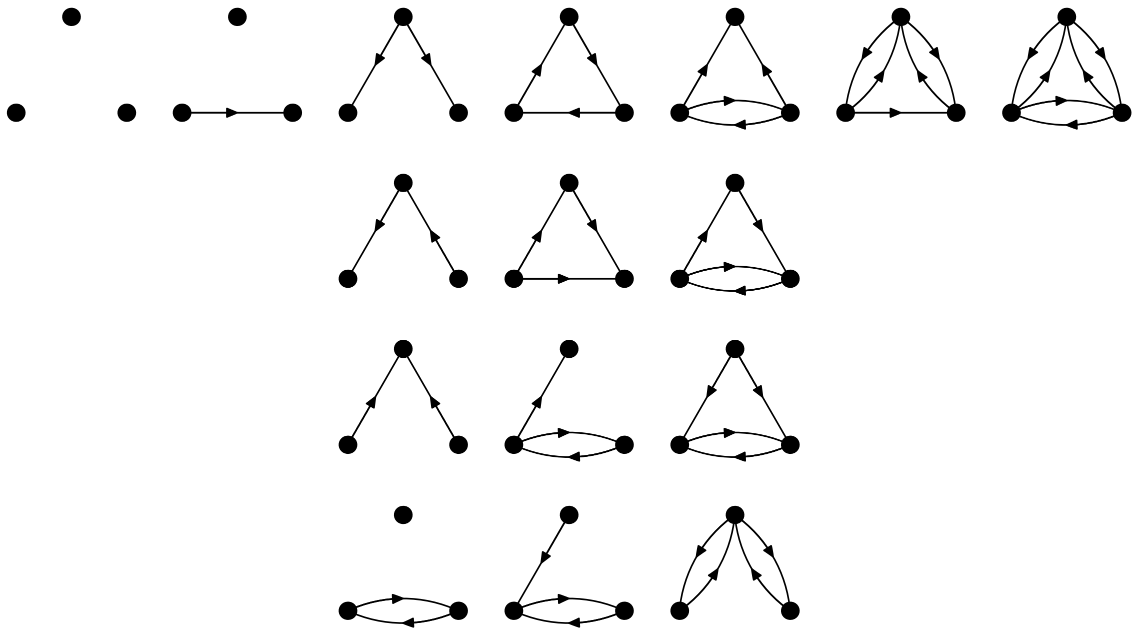
$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n(n-1)} \binom{n(n-1)}{k} x^k = (1+x)^{n(n-1)}. \tag{1.4}$$

Je zrejmé, že

$$D_n(x) = G_n^2(x), \tag{1.5}$$

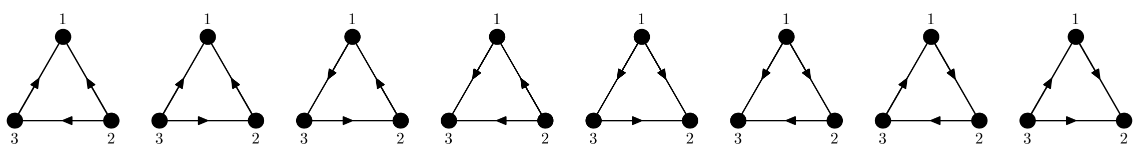
pretože $D_n(1) = 2^{n(n-1)} = G_n^2(1)$.

V kruhovom turnaji je daný počet hráčov, ktorí hrajú hru, ktorej pravidlá nepripúšťajú ako výsledok remízu a ľubovoľní hráči sa striedajú v zápase práve jeden raz, a len jeden z nich sa stáva



Obrázok 1.5: 16 orientovaných neoznačených grafov rádu 3.

víťaz. Z uvedeného vyplýva, že turnaj predstavuje orientovaný graf, v ktorom je každá dvojica rôznych vrcholov spojená len jednou orientovanou hranou. Zakončíme tento paragraf poznámkou, že počet označených turnajov rádu n je práve $2^{\binom{n}{2}}$, t.j. taký, ako aj počet označených grafov určených formulou (1.2). Toto pozorovanie sa potvrdzuje pre $n = 3$ na obrázku 1.6.



Obrázok 1.6: Osem označených turnajov tretieho rádu.

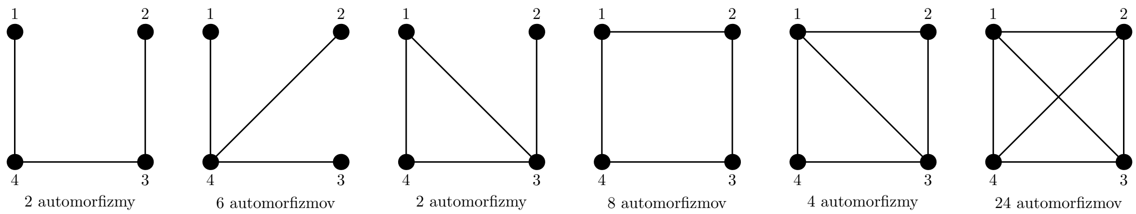
Okrem toho, prirodzený vzťah medzi týmito dvoma triedami grafov môžeme ukázať tak, že každý označený turnaj zodpovedá tomu označenému grafu, v ktorom vrcholy so značkami i a j sú susedné práve vtedy, keď $i < j$ a orientovaná hrana (i, j) sa vyskytuje v turnaji.

1.2 Súvislé grafy

Súvislým grafom nazývame graf, v ktorom sú ľubovoľné dva rôzne vrcholy spojené cestou. Počet označených súvislých grafov rádu 4 môžeme vyčísliť triviálnym spôsobom, ak formulu (1.3) aplikujeme na každý zo súvislých grafov.

Rády grúp týchto grafov, počítame od ľava do prava, sú rovné $2; 4; 2; 8; 4; 24$. Preto z formuly (1.3) vyplýva, že počet označených súvislých grafov štvrtého rádu je rovný 38. Tento výsledok nedáva žiadny smer, ktorý by pomohol násť formulu pre počet C_n súvislých označených grafov rádu n. Na to, aby sme dosiahli tento cieľ, sú potrebné niektoré definície.

Podgraf H grafu G má $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Komponent grafu predstavuje maximálny súvislý podgraf. Graf s koreňom (alebo zakorenený graf) má jeden oddelený vrchol, ktorý nazývame koreň. Dva zakorenené grafy nazveme izomorfné, ak existuje vzájomne jednoznačné



Obrázok 1.7: Šesť označených súvislých grafov štvrtého rádu s počtami svojich symetrií.

zobrazenie množiny vrcholov jedného grafu na množinu vrcholov druhého grafu, ktoré zachováva nielen susednosť, ale aj korene. Analogické požiadavky sa kladú aj pri opísaní zakorenených označených grafov. Tieto pojmy môžeme teraz použiť na dosiahnutie nasledujúcej rekurzívnej formuly.

Veta 1.2.1 Počet C_n súvislých označených grafov vyhovuje vzťahu:

$$C_n = 2^{\binom{n}{2}} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n}{k}2^{\binom{n-k}{2}}C_k. \tag{1.6}$$

Na to, aby sme dokázali (1.6) poznamenávame, že ak v označenom grafe urobíme koreňmi rôzne vrcholy, potom dostávame rôzne zakorenené označené grafy. Z toho vyplýva, že počet zakorenených označených grafov rádu n je rovný nG_n. Počet zakorenených grafov rádu n, u ktorých sa koreň nachádza v komponente obsahujúcej práve k vrcholov je rovný $kC_k\binom{n}{k}G_{n-k}$. Ak spočítame tieto súčiny podľa k od 1 po $n-1$, opäť dostávame výraz pre počet zakorenených označených grafov, a to nesúvislých, t.j. $\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n}{k}C_kG_{n-k}$.

Hodnoty pre malé hodnoty n sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_n	1	1	4	38	728	26704	1866256	251548592	66296291072

Tabuľka 1.1: Počty označených súvislých grafov rádu n pre $n = \overline{1,9}$.

V ďalších našich úvahách bude dôležité mať k dispozícii pojem exponenciálnej generujúcej funkcie a mať zreteli niekoľko vlastností takej funkcie. Zavedieme tieto pojmy a použijeme ich na to, aby sme získali iný tvar pre výpočet, určenie počtu súvislých označených grafov.

Pre každé $k = 1, 2, 3, \ldots$ označíme a_k počet spôsobov, ktorými môžeme označiť všetky grafy rádu k, ktoré majú niektorú vlastnosť $P(a)$. (V prípade, že $k = 0$, uvažujeme aj tzv. prázdny graf, t.j. graf bez vrcholov a hrán). Potom formálny mocninový rad

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \tag{1.7}$$

nazývame exponenciálnou generujúcou funkciou pre triedu všetkých grafov, ktoré uvažujeme v danom prípade.

Predpokladajme taktiež, že

$$b(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!} \tag{1.8}$$

je iná exponenciálna generujúca funkcia pre triedu grafov vyhovujúcich vlastnosti $P(b)$.

Nasledujúca lema dáva užitočnú interpretáciu koeficientov súčinu $a(x)b(x)$ týchto dvoch generujúcich funkcií.

Nech $a(x)b(x) = c(x)$, v prípade, že pripustíme aj prázdny graf, pre koeficient c_n v exponenciálnej generujúcej funkcii $c(x)$ platí:

$$c_n = a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \ldots + \binom{n}{k} a_k b_{n-k} + \ldots + a_n b_0.$$

Lema 1.2.1 (O spočítavaní označených grafov) Koeficient pri $x^k/k!$ v $a(x)b(x)$ je rovný počtu usporiadaných dvojíc (G_1, G_2) dvoch disjunktných grafov, G_1 má vlastnosť $P(a)$, G_2 má vlastnosť $P(b)$; k je počet vrcholov v $G_1 \cup G_2$ a značky od 1 po k (alebo od 0 po k) sú rozdelené na grafe $G_1 \cup G_2$.

Na ilustráciu tejto lemy zavedieme exponenciálnu generujúcu funkciu $C(x)$ pre označené súvislé grafy:

$$C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{x^k}{k!}. \tag{1.9}$$

Potom $C(x)C(x)$ je generujúca funkcia pre usporiadané dvojice označených súvislých grafov. Ak predelíme tento rad číslom 2, dostávame exponenciálnu generujúcu funkciu pre označené grafy, ktoré majú práve dva komponenty súvislosti. Analogicky, rad $C^n(x)/n!$ má pri $x^k/k!$ koeficient rovný počtu označených grafov rádu k, obsahujúcich práve n komponentov súvislosti. Ak $G(x)$ označíme exponenciálnu generujúcu funkciu pre označené grafy, potom

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^n(x)}{n!}. \tag{1.10}$$

Takýmto spôsobom dostávame nasledujúci exponenciálny vzťah medzi príslušnými generujúcimi funkciami $G(x)$ a $C(x)$.

Veta 1.2.2 Exponenciálne generujúce funkcie $G(x)$ a $C(x)$ pre označené grafy a označené súvislé grafy vyhovujú nasledujúcemu vzťahu:

$$1 + G(x) = e^{C(x)}. \tag{1.11}$$

Poznamenávame, že (1.11) platí aj pre iné triedy grafov, napr. multigrafy. Ďalej si treba uvedomiť, že číslo 1 vystupuje v rovnosti (1.11) z toho dôvodu, že vo vzťahu (1.10) neuvažujeme prázdny graf. Ďalej upozorňujeme, že z literatúry je známy výsledok autorov J. Riordana a C. L. Mallowsa pre rekurentný výpočet C_n – počtu súvislých označených n-vrcholových grafov:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (2^k - 1) C_k C_{n-k}. \tag{1.12}$$

Okrem toho je zrejmé, že ak je známa exponenciálna generujúca funkcia pre niektorú triedu grafov, potom exponenciálnu generujúcu funkciu pre zodpovedajúcu triedu súvislých grafov dostaneme tak, že formálne logaritmujeme prvý rad presne tak, ako v prípade (1.11) pre triedu všetkých grafov. To nám umožňuje sformulovať nasledujúci všeobecný výsledok.

Dôsledok 1.2.1 Ak

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m x^m = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^n \right),$$

potom pre $m \geq 1$

$$a_m = A_m - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{n}{k} a_k A_{m-k}. \tag{1.13}$$

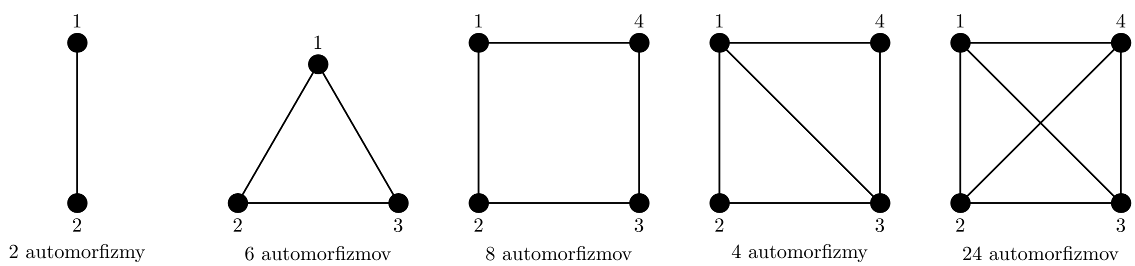
1.3 Bloky

Vynechaním vrchola v z grafu G získavame podgraf $G - v$ grafu G, ktorý sa skladá zo všetkých vrcholov grafu G, okrem vrchola v a všetkých hrán grafu neincidujúcich s vrcholom v. Artikuláciou grafu sa nazýva taký vrchol grafu, vynechaním ktorého sa zväčší počet komponentov súvislosti. Blokom alebo nerozdeliteľným grafom sa nazýva súvislý netriviálny graf, ktorý nemá artikulácie. V tejto časti textu bude určený vzájomný vzťah medzi generujúcimi funkciami pre označené bloky a označené súvislé grafy. Metóda, ktorú tu uplatníme je úspešná len v prípade označených objektov.

Nakoľko sa zaoberáme úlohou vyčíslenia označených objektov, budeme používať exponenciálne generujúce funkcie. Nech $B(x)$ označuje rad pre označené bloky, potom

$$B(x) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, \tag{1.14}$$

kde B_n je počet blokov s n vrcholmi. Ako vyplýva z formuly pre určenie počtu spôsobov rozdelenia značiek v grafe, je koeficient pri x^n v $B(x)$ rovný súčtu veličín prevrátených k rádom grúp blokov s n-vrcholmi.



Obrázok 1.8: Najmenšie bloky a počty ich symetrií.

Ak využijeme uvedený obrázok, tak pre $B(x)$ získavame niekoľko prvých členov:

$$B(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^4 + \ldots = \frac{1 \cdot x^2}{2!} + \frac{1 \cdot x^3}{3!} + \frac{10 \cdot x^4}{4!} + \ldots. \tag{1.15}$$

Našim cieľom je dokázať nasledujúcu vetu, kde $C'(x)$ a $B'(x)$ označujú obyčajnú formálnu deriváciu príslušných radov.

Veta 1.3.1 Exponenciálne generujúce funkcie $B(x)$ a $C(x)$ pre označené bloky a súvislé grafy vyhovujú nasledujúcemu vzťahu:

$$\ln C'(x) = B'(xC'(x)). \tag{1.16}$$

Dôkaz. Na to, aby sme preverili túto identitu označíme $R(x)$ exponenciálnu generujúcu funkciu pre súvislé označené grafy s koreňom, takže koeficient pri x^n je $R_n/n!$. Pretože $R_n = nC_n$ pre všetky n, dostávame rovnosť

$$R(x) = xC'(x). \tag{1.17}$$

Označme $R_p(x)$ exponenciálny rad pre súvislé označené grafy s koreňom, u ktorých práve p blokov obsahuje koreň. Takýmto spôsobom $R_0(x) = x$ a súčasne platí, že

$$R(x) = \sum_{p=0}^{\infty} R_p(x). \tag{1.18}$$

Okrem toho si treba všimnúť, že $R_1(x)$ vyčísluje zakorenené súvislé grafy, u ktorých práve jeden blok inciduje s koreňom. Predpokladajme, že $S(x)$ je zodpovedajúci rad pre ten prípad, keď koreň nie je označený, t.j. koeficient pri $x^n/n!$ je rovný počtu zakorenených súvislých grafov s $n+1$ vrcholmi, u ktorých je koreň neoznačený. Potom z lemy o spočítavaní označených grafov a z vlastnosti násobenia exponenciálnych generujúcich funkcií označených grafov vyplýva, že $R_1(x) = xS(x)$ a teda $S(x) = R_1(x)/x$.

Na základe tej istej lemy rad

$$\frac{(R_1(x)/x)^p}{p!}$$

vyčísluje p-množiny takých grafov, pričom každý koreň nie je označený. Ak týchto p koreňov stotožníme a zavedieme pre ne jednu značku, potom budeme mať vyčíslenie zakorenených označených súvislých grafov, u ktorých práve p blokov inciduje s koreňom. Ustanovenie označeného koreňa uskutočníme jednoducho prenásobením x. Teda dostávame

$$R_p(x) = x\frac{(R_1(x)/x)^p}{p!}. \tag{1.19}$$

Kombináciou dvoch posledných formúl dostávame nasledujúci vzťah:

$$R(x) = x\exp\left(R_1(x)/x\right). \tag{1.20}$$

Teraz sa pokúsime vyjadriť $R_1(x)$ pomocou $B(x)$ a $R(x)$. Poznamenávame, že rad $(R(x)/x)^{k-1}$ spočítava súbory z $k-1$ zakorenených označených súvislých grafov, pričom v týchto súboroch je $k-1$ koreňov neoznačených a nie sú zahrnuté do počtu spočítavaných vrcholov. Inými slovami, koeficient pri $x^n/n!$ v tomto rade predstavuje počet súborov, z ktorých každý sa skladá z $k-1$ zakorenených grafov, pričom korene grafov sú neoznačené a celkový počet vrcholov v súbore vrátane koreňov je rovný $n+k-1$. Vynásobením tohto radu s B_k dostávame rad vyčíslujúci zakorenené súvislé grafy, u ktorých koreň inciduje s jediným blokom a pre značky tohoto bloku sme použili len čísla od 1 po k. Nakoniec, aby sme vzali do úvahy rozdelenie všetkých značiek, treba aby sme všetko vynásobili $x^k/k!$. Dostávame

$$k\cdot B_k\left(R(x)/x\right)^{k-1}\cdot\frac{x^k}{k!} = x\cdot B_k(R(x))^{k-1}/(k-1)!.$$

Teda rad $x\cdot B_k(R(x))^{k-1}/(k-1)!$ vyčísluje zakorenené označené súvislé grafy, u ktorých s koreňom inciduje práve jeden blok rádu k. Ak spočítame podľa k, dostávame vzťah

$$R_1(x) = x\sum_{k=2}^{\infty} B_k(R(x))^{k-1}/(k-1)!. \tag{1.21}$$

Kombinovaním formúl (1.20) a (1.21) dostávame nasledujúci výsledok:

$$\ln(R(x)/x) = \sum_{k=2}^{\infty} B_k(R(x))^{k-1}/(k-1)!, \tag{1.22}$$

čiže

$$\ln C'(x) = \sum_{k=2}^{\infty} B_k(xC'(x))^{k-1}/(k-1)! = B'(xC'(x)).$$

□

Poznámka 1.3.1 Ak porovnávame koeficienty pri x^n vo výrazoch, ktoré stoja v pravej a v ľavej časti formuly (1.16) môžeme získať rekurzívnu formulu pre B_n. Koeficient pri x^n v ľavej časti formuly (1.16) môže byť vyjadrený pomocou koeficientov funkcie $C(x)$. Použijeme vzťah (1.13) z dôsledku uvedenom v časti 1.2. Kvôli vhodnosti označme ako $h(n,k)$ koeficient pri x^n v $(xC'(x))^k$. Potom koeficient pri x^n v pravej časti formuly (1.16) je

$$\sum_{k=2}^{n} B_k h(n,k-1)/(k-1)!. \tag{1.23}$$

Z toho vyplýva, že počet B_n označených blokov môžeme vyjadriť pomocou počtu C_n označených súvislých grafov, ak použijeme vzťah (1.16).

Opísaná metóda môže byť rozšírená bez veľkých ťažkostí tak, že miesto druhého parametra môžeme zobrať počet hrán.

1.4 Eulerovské grafy

V tejto časti odvodíme generujúcu funkciu pre označené eulerovské grafy. Stupňom vrchola v (označujeme ako $deg\ v$) v grafe G nazývame počet hrán grafu G, ktoré sú incidentné s vrcholom v. Ak každý vrchol grafu G má párny stupeň, potom graf nazývame párny. Eulerovský graf je súvislý párny graf.

Nech W_n je počet označených párnych grafov rádu n. Potom platí nasledujúca, tak trocha neočakávaná, veta.

Veta 1.4.1 Počet označených párnych grafov rádu n je rovný počtu označených grafov rádu $n-1$, teda

$$W_n = 2^{\binom{n-1}{2}}. \tag{1.24}$$

Dôkaz. Aby sme dokázali tento výsledok, ustanovíme vzájomne jednoznačný vzťah medzi týmito dvoma triedami grafov. Uvažujme ľubovoľný označený graf G rádu $n-1$. Graf G musí mať párny počet vrcholov nepárneho stupňa. Pridáme k nemu vrchol v, ktorému pripíšeme značku n. Nakoniec z grafu G vyrobíme graf G' tak, že spojíme vrchol v s každým vrcholom grafu G, ktorý má nepárny stupeň. Tento graf G' je označený párny graf rádu n. Ľahko vidieť, že opísaný vzťah je vzájomne jednoznačný, a že každý označený párny graf rádu n môžeme dostať takýmto spôsobom z niektorého grafu rádu $n-1$. □

Aby sme dokázali formulu pre počet označených eulerovských grafov, využijeme generujúce funkcie. Nech $W(x)$ je exponenciálna generujúca funkcia pre označené párne grafy. Potom platí:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\binom{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} \tag{1.25}$$

Ďalej, nech U_n je počet označených eulerovských grafov rádu n, takže

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \frac{x^n}{n!} \tag{1.26}$$

je zopovedajúca exponenciálna generujúca funkcia.

Veta 1.4.2 Exponenciálna generujúca funkcia $U(x)$ pre označené eulerovské grafy vyhovuje vzťahom

$$U(x) = \ln\left(W(x) + 1\right) \tag{1.27}$$

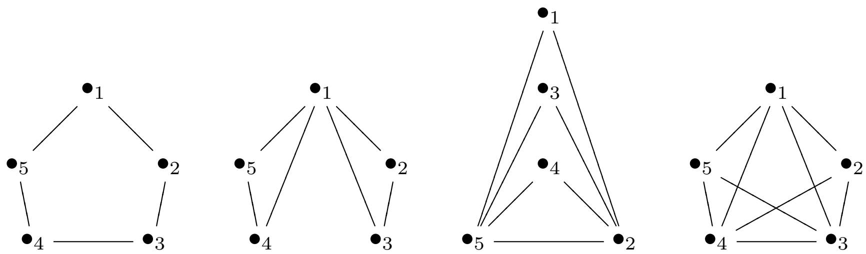
$$U_n = 2^{\binom{n-1}{2}} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} 2^{\binom{n-k-1}{2}} U_k \tag{1.28}$$

Formula (1.27) vyplýva z toho faktu, že ak je známa generujúca funkcia pre ľubovoľnú triedu grafov, potom zodpovedajúcu generujúcu funkciu pre zodpovedajúce súvislé grafy dostaneme pomocou formálneho $\log n$ - logaritmovania prvého rádu. Rekurentný vzťah 1.60 je dôsledkom vlastností uvedných tried grafov.

Pre niekoľko prvých členov radu $U(x)$ máme rovnosť

$$U(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{38x^5}{5!} + \dots \tag{1.29}$$

Štyri eulerovské grafy rádu 5 sú zobrazené na nasledujúcom obrázku spolu s rádmi ich grúp. V súlade so známou formulou, veličiny obrátené k týmto číslam musia dať v súčte číslo $\frac{38}{5!}$, ktoré predstavuje koeficient x^5 v rade $U(x)$, a ony ju skotočne dávajú.



10 8 12 120

Ďalej budeme uvažovať ťažšiu úlohu; určiť počet označených eulerovských grafov s daným počtom vrcholov a hrán. Pokúsime sa ustanoviť nasledujúci výsledok.

Veta 1.4.3 Mnohočlen $w_n(x)$, u ktorého koeficient pri x^q je rovný počtu označných grafov, ktoré majú n vrcholov párneho stupnňa a q hrán, je určený formulou

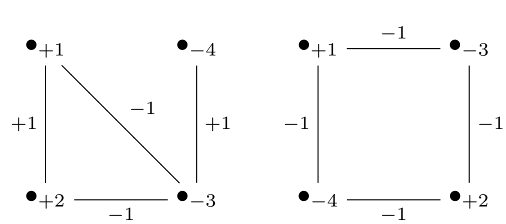
$$w_n(x) = \frac{1}{2^n}(1+x)^{\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k(n-k)} \tag{1.30}$$

Poznamenávame, že pre malé n platí: $w_1(x) = w_2(x) = 1$, $w_3(x) = 1 + x^3$, $w_4(x) = 1 + 4x^3 + 3x^4$.

Dôkaz. Nech L je množina všetkých označených grafov rádu n, ktoré majú práve q hrán. Uvažujme ľubovoľný graf G z množiny L a ľubovoľným spôsobom vynásobíme každú zo značiek $1, ..., n$ číslom $+1$ alebo -1. Pretože značky budú kladné alebo záporné, každý vrchol môžeme uvažovať ako kladne nabitý alebo záporne nabitý v závislosti od znamienka značky. Každej hrane potom pripisujeme číslo $+1$ alebo -1 rovné súčinu znamienok vrcholov incidujúcich s hranou. Znamieko grafu G označujeme ako $\sigma(G)$; definujeme ho ako súčin znamienok hrán. Je zrejmé, že existuje 2^n spôsobov, ktorými môžu byť pripísané znamienka značkám daného grafu.

Z druhej strany, predpokladajme, že znamienka sú už rozdelené po n - celým číslam, ktoré slúžia ako značky; potom existuje $\binom{\binom{n}{2}}{q}$ rôznych grafov s q hranami, a s takými n vrcholmi, ktorých znamienka sú určené v súlade s daným rozdelením znamienok v množine značiek. Tieto pojmy ilustrujeme na nasledujúcom obrázku

G_1 G_2



Pretože $\sigma(G)$ je znamienko súčinu kladných a záporných čisiel, zodpovedajúcich susedným vrcholom, potom kladné vrcholy v tomto súčine môžeme vynechať. Takýmto spôsobom

$$\sigma(G) = (-1)^a \tag{1.31}$$

kde a je súčet stupňov zápornych vrcholov. Zdruhej strany, je zrejmé, že

$$\sigma(G) = (-1)^b \tag{1.32}$$

kde b je počet záporných hrán grafu G, z ktorých každá spája záporný vrchol s kladným vrcholom. Ďalej uvažujme súčet $\sum \sigma(G)$, kde súčet robíme podľa všetkých označných grafov G z množiny L a vzhľadom na množinu S, ktorá sa skladá z 2^n možných rozdelení čísel $+1$ a -1 podľa značiek, ktoré su pripísané vrcholom. Ako vyplýva z predchadzajúcich výrazov, tento súčet môžeme zapísať (vyjadriť) dvoma rôznymi spôsobmi

$$\sum_{G\in L}\left(\sum_{S}(-1)^a\right)=\sum_{S}\left(\sum_{G\in L}(-1)^b\right) \tag{1.33}$$

Najprv uvažujme ľavú časť vzťahu (1.33). Ak G je párny graf, potom a je párne číslo pri ľubovoľných rozdeleniach z množiny S. Z toho vyplýva, že $\sum(-1)^a = 2^n$ a graf G prispieva do ľavej časti rovnosti (1.33) vkladom 2^n. Ak graf G nie je párny, potom aspoň jeden jeho vrchol v má nepárny stupeň. Podmnožina rozdelení z S, pre ktoré je značka vrchola v kladná, a podmnožina rozdelení z S, pre ktoré je značka záporná, sú rovnakej mohutnosti a vklad do súčtu $\sum_S(-1)^a$ je rôzny v znamienku a rovnaký čo do mohutnosti.

Z toho vyplýva, že graf G nič neprináša do ľavej časti rovnosti (1.33). Takýmto spôsobom, ľavá časť vzťahu (1.33) je rovná 2^n vzatá toľkokrát, koľko je párnych grafov v množine L.

Ďalej sa sústredíme na porovnanie pravej časti rovnosti (1.33) a uvažujeme také rozdelenie z množiny S, pre ktoré je k vrcholov kladných a $m = n - k$ záporných. Existuje $\binom{n}{k}$ takýchto rozdelení, a ak vyberieme l hrán, ktoré spájajú kladné vrcholy so zápornými, tak ho môžeme uskutočniť $\binom{mk}{l}$ rôznymi spôsobmi. Vynechanie $q-l$ hrán môžeme uskutočniť

$$\binom{\binom{k}{2}+\binom{m}{2}}{q-l} \tag{1.34}$$

rôznymi spôsobmi. Ak sčítame podľa l od 0 po q, dostávame výraz

$$\sum_{l=0}^{q}(-1)^l\binom{km}{l}\binom{\frac{k(k-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}}{q-l} \tag{1.35}$$

ktorý sa pridáva do pravej časti vzťahu (1.33) s každým rozdelením z množiny S s danými k, m. Tento výraz predstavuje samotný koeficient pri x^q v mnohočlene

$$(1-x)^{km}(1+x)^{\frac{k(k-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}}. \tag{1.36}$$

Preto pravá časť rovnosti (1.33) je koeficient pri x^q v súčte

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-x)^{km}(1+x)^{\frac{k(k-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}} \tag{1.37}$$

a tento koeficient je rovný 2^n vzatý toľkokrát, koľko je párnych grafov v L. Poznamenávame, že

$$\binom{k}{2}+\binom{m}{2}=\binom{n}{2}-k(n-k) \tag{1.38}$$

A tak dostávame konečný výsledok: hľadaný počet párnych grafov je rovný koeficientu pri x^q vo výraze stojacemu v pravej časti formuly (1.30). □

Poznamenávame, že celkový počet označených párnych grafov je rovný číslu $w_n(1)$, ktoré dostávame, ak v (1.30) kladieme $x = 1$ a prijímame dohodu, že $y^0 = 1$ aj v prípade, že $y = 0$:

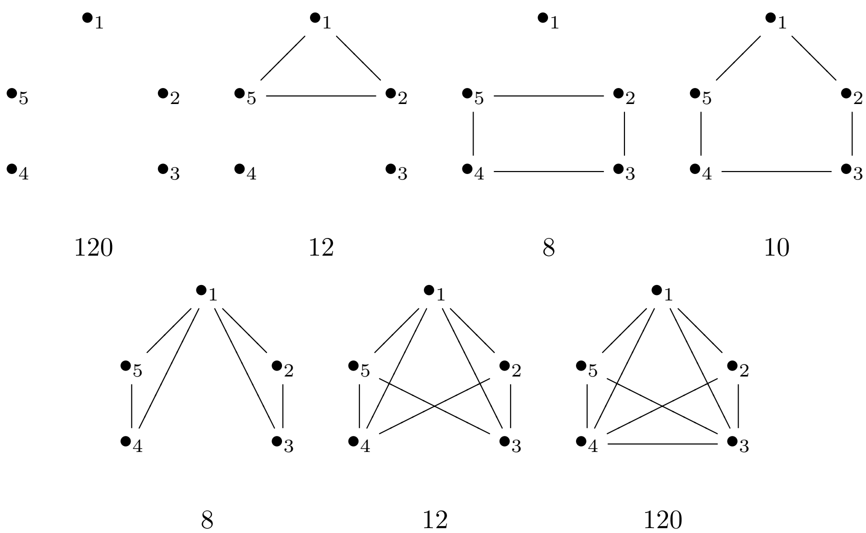
$$w_n(1) = 2^{\binom{n-1}{2}} \tag{1.39}$$

ktorá je potvrdená formulou (1.30).

Môžeme použiť formulu (1.30), aby sme získali mnohočlen

$$w_5(x) = 1 + 10x^3 + 15x^4 + 12x^5 + 15x^6 + 10x^7 + x^{10} \tag{1.40}$$

a 64 označených párnych grafov, vyčíslených mnohočlenom $w_5(x)$, ktorý môžeme zostrojiť aj tak, že výjdeme zo siedmych párnych označených grafov rádu 5, ktoré sme zobrazili na nasledujúcom obrázku



Párne grafy piateho rádu s počtami symetrii.

Exponenciálna generujúca funkcia $w(x, y)$, vyčislujúca všetky označené párne grafy je určená vzťahom

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(x) y^n}{n!} \tag{1.41}$$

Aby sme dostali generujúcu funkciu $u(x, y)$ pre označené eulerovské grafy, ktoré majú daný počet vrcholov a hrán, treba prelogaritmovať rad $1 + w(x, y)$:

$$w(x, y) = \ln\left(1 + w(x, y)\right) \tag{1.42}$$

Táto poznámka vyplýva z variantu lemy pre násobenie exponenciálnych generujúich funkcii označených grafov pre prípad dvoch premenných.

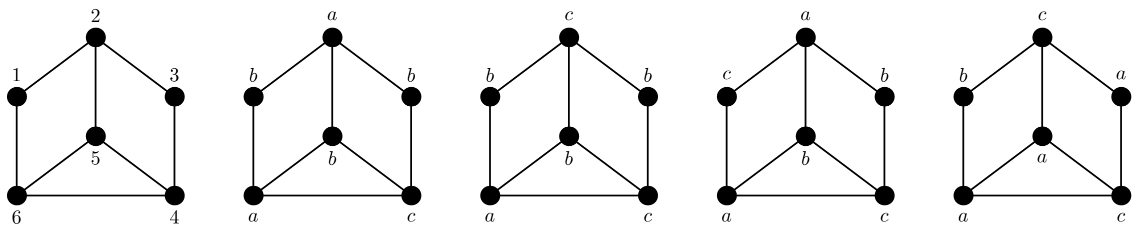
1.5 Počet k-zafarbiteľných grafov

Zafarbiteľný graf sa skladá z grafu G s množinou vrcholov V a takého vzťahu ekvivalencie na V, že ľubovoľné dva susedné vrcholy nie sú ekvivalentné. Triedy ekvivalencie uvažujeme ako rôzne farby a graf G sa nazýva k-zafarbiteľným podľa počtu tried ekvivalencie. Dva k-zafarbiteľné grafy sú izomorfné, ak existuje vzájomne jednoznačné zobrazenie medzi ich množinami vrcholov, ktoré zachováva susednosti aj farbu. Treba poznamenať, že farby nemusia byť dané vždy pevne, ale môžu byť vzájomne zameniteľné. Teda daný graf môže byť k-zafarbiteľný mnohými spôsobmi. Napríklad, všetky 3-zafarbenia niektorého označeného grafu G rádu 6 sú uvedené na obrázku 1.9, kde písmená a, b, c označujú farby a prirodzené čísla označujú značky vrcholov. Poznamenávame, že na danom obrázku sú farby dané pevne.

Nech $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sú celé kladné čísla, ktoré tvoria usporiadanú partíciu čísla n, tak že nám platí:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n. \tag{1.43}$$

Ak označíme $\{n\}$ ľubovoľnú usporiadanú partíciu čísla n, potom môžeme sformulovať nasledujúce tvrdenie:



Obrázok 1.9: Všetky 3-zafarbenia grafu.

Veta 1.5.1 Počet $C_n(k)$ k-zafarbiteľných označených grafov rádu n je rovný

$$C_n(k) = \frac{1}{k!} \sum_{\{n\}} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} 2^{(n^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i^2)/2}. \tag{1.44}$$

Dôkaz. Poznamenávame, že počet k-zafarbiteľných označených grafov rádu n, u ktorých farby nie sú fixované, je rovný $k!C_n(k)$. Preto uvažujme k fixovaných farieb. Každé riešenie $\{n\}$ určuje usporiadaný rozklad čísla n na k častí, a preto hľadáme počet označených grafov, u ktorých n_i vrcholov má i-tu farbu. Počet spôsobov, ktorými môžu byť vybrané farby pre vrcholy, je určený polynomiálnym koeficientom

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Je zrejmé, že existuje

$$\binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{k} \binom{n_i}{2} \tag{1.45}$$

dvojíc vrcholov, ktoré majú rôzne farby. Pretože každá taká dvojica môže byť buď susedná, alebo nie susedná, potom keď umocníme 2 na výraz (1.45) a použijeme rovnosť (1.43), dostávame pre celkový počet grafov s n_i vrcholmi farby i práve ten výraz, ktorý sa nachádza pod znakom súčtu vo formule (1.44). Ak spočítame podľa všetkých $\{n\}$ dostávame súčin $k!C_n(k)$. Tým je však formula (1.44) dokázaná. □

Poznamenávame, že koeficient pri x^q v mnohočlene

$$\frac{1}{k!} \sum_{\{n\}} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} (1+x)^{(n^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i^2)/2}$$

je rovný počtu k-zafarbiteľných označených (n, q)-grafov. Ak aplikujeme toto tvrdenie v prípade $n = 4, q = 5, k = 3$, dostávame číslo 6, t.j. počet zafarbení grafu znázorneného na obrázku.

Nie je ťažké dostať pre $C_n(k)$ rekurzívnu formulu

$$C_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} 2^{r(n-r)} C_r(k-1), \tag{1.46}$$

pričom preverenie formuly (1.46) možno uskutočniť tak, že vyjadríme generujúcu funkciu pre $C_n(k)$ pomocou generujúcej funkcie $C_n(k-1)$. Hodnoty súčinu $k!C_n(k)$ pre $n \leq 7$ môžeme zostaviť do tabuľky pomocou známych výsledkov.

Poznamenávame, že formula vyjadrujúca vzťah medzi koeficientami exponenciálnych generujúcich funkcií pre triedy grafov a príslušné triedy súvislých grafov sa v prípade k-zafarbiteľných a súvislých k-zafarbiteľných grafov použiť nedá, problém spôsobuje susednosť.

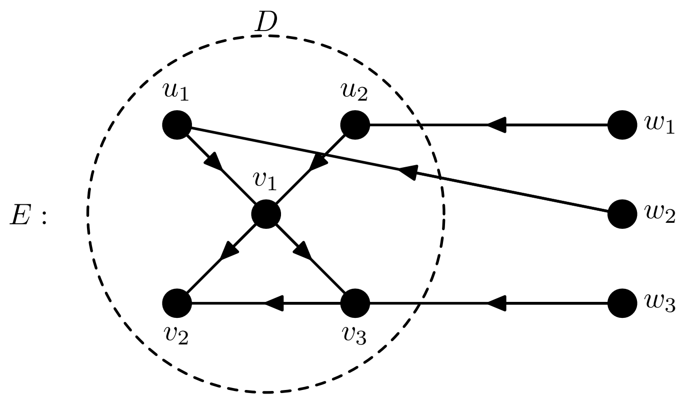
1.6 Acyklické orientované grafy

Orientovaný sled dĺžky n v orientovanom grafe D sa definuje postupnosťou vrcholov $v_0, v_1, \ldots, v_n$, v ktorom vrchol v_i je susedný s vrcholom v_{i+1} pre $i < n$. V uzavretom orientovanom slede počiatočný a koncový vrchol sú totožné. Uzavretý orientovaný sled

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n, e_n, v_1,$$

v ktorom všetky vrcholy sú navzájom rôzne a pre hrany $e_1, \ldots, e_n$ platí, že $e_i = (v_i, v_{i+1}), i = \overline{1, n-1}$ a $e_n = (v_n, v_1)$ nazývame cyklus. Acyklický orientovaný graf nemá orientovaných cyklov. Vyčíslenie označných acyklických orientovaných grafov uskutočníme nasledujúcim spôsobom.

Orientovaný graf E sa nazýva rozšírením orientovaného grafu D, ak D je orientovaným podgrafom orientovaného grafu E indukovaným podmnožinou tých vrcholov orientovaného grafu E, ktoré majú kladné vnútorné polostupne.



Obrázok 1.10: Rozšírenie acyklického orientovaného grafu.

Kazdý acyklický orientovaný graf musí obsahovať aspoň jeden vrchol s nulovým vnútorným polostupňom. Možno to dokázať indukciou vzhľadom na počet vrcholov alebo počet hrán.

Z uvedeného vyplýva, že každý acyklický orientovaný graf, ktorý má aspoň jednu orientovanú hranu, je rozšírením jediného vlastného orientovaného podgrafu. Okrem toho, každý acyklický orientovaný graf má mnoho rozšírení, no všetky musia byť acyklickými orientovanými grafmi.

Predpokladajme, že D je acyklický orientovaný graf, ktorý má práve $t \geq 1$ vrcholov u_i, ktorých vnútorný stupeň je rovný nule a s ostatných vrcholov v_i. Môžeme zostrojiť rozšírenie E orientovaného grafu D obsahujúce rovno k vrcholov s nulovým vnútorným polostupňom tak, že pridáme k nových vrcholov w_i a nové orientované hrany také, že každý z t vrcholov u_i je susedný s niektorým novým vrcholom w_i.

Taktiež rovnako každý vrchol w_i môže byť susedný s ľubovoľným vrcholom v_i orientovaného grafu D. Na obrázku 1.10 sú nové pridané vrcholy označené ako w_1, w_2 a w_3; každý starý vrchol u_1 a u_2 s nulovým vnútorným polostupňom je susedný s niektorým vrcholom w_i.

Takýmto spôsobom všetky acyklické orientované grafy rádu n môžeme dostať pomocou rozšírenia acyklických orientovaných grafov rád ktorých je menší ako n. Presnejšie, nech a_n je počet označených acyklických orientovaných grafov rádu n, ďalej $a_{n,k}$ – počet takých orientovaných grafov, u ktorých rovno k vrcholov má nulový vnútorný polostupeň. Ak $k = n$, potom $a_{n,n} = 1$, v tomto prípade vyhovuje len úplne nesúvislý orientovaný graf. Zrejme, že pre všetky n

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}. \tag{1.47}$$

Teraz ukážeme, ako môžu byť vyjadrené $a_{n,k}$ pomocou $a_{n-k,r}$ pre $r \geq n - k$. Najskôr dokážeme, že všetky možné rozšírenia všetkých $a_{n-k,r}$ orientovaných grafov s $n - k$ vrcholmi, z ktorých práve

r vrcholov má nulový vnútorný polostupeň, dáva do hodnoty $a_{n,k}$ vklad rovný

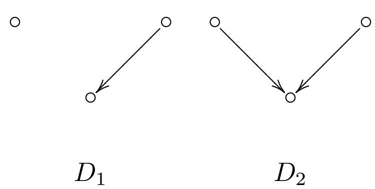
$$(2^k - 1)^r 2^{k(n-r-k)} \binom{n}{k} a_{n-k,r}. \tag{1.48}$$

Hľadáme počet označených rozšírení E všetkých $a_{n-k,r}$ označených acyklických orientovaných grafov D. Pre každý z $\binom{n}{k}$ spôsobov ako rozostaviť značky u k nových vrcholov w_i v rozšírení E existuje $a_{n-k,r}$ rozdelení značiek v orientovaných grafoch D, ktoré môžu byť rozšírené. To objasňuje činiteľ $\binom{n}{k} a_{n-k,r}$ vo výraze 1.48. Každý z r vrcholov s nulovým vnútorným polostupňom v orientovanom grafe D musí byť susedný s aspoň jedným novým vrcholom w_i $(1 \leq i \leq k)$. Z toho vyplýva, že existuje $2^k - 1$ možností orientovať hrany do každého z týchto r vrcholov, čo dáva $(2^k - 1)^r$ pre všetky vrcholy. Každý nový vrchol môže byť alebo nebyť susedný s každým s $n - k - r$ vrcholov, ktoré majú v orientovanom grafe D kladný vnútorný polostupeň. To znamená, že existuje 2^{n-k-r} možných kombinácií pre každý z nových vrcholov a teda $(2^{n-r-k})^k$ kombinácií pre všetky také vrcholy. Ak vynásobíme všetky tieto výrazy, dostávame (1.48). Ak spočítame (1.48) podľa r, dostávame vzťah pre $a_{n,k}$.

Veta 1.6.1 Počet $a_{n,k}$ označených orientovaných acyklických grafov rádu n, ktoré majú rovno k vrcholov s nulovým vnútorným polostupňom, vyhovuje vzťahu

$$a_{n,k} = \sum_{r=1}^{n-k} (2^k - 1)^r 2^{k(n-r-k)} \binom{n}{k} a_{n-k,r} \tag{1.49}$$

Takýmto spôsobom pre nájdenie a_n môžeme použiť formuly (1.47) a (1.49). Tieto výrazy môžeme taktiež vyjadriť generujúcimi funkciami. Nech v rade $a(x, y)$ koeficient pri $x^k y^{n-k}$ je rovný počtu označených orientovaných acyklických grafov s n vrcholmi, z ktorých práve k vrcholov má nulový vnútorný polostupeň.



Obrázok 1.11: Dva acyklické orientované grafy tretieho rádu, ktoré majú po dva vrcholy s nulovým vnútorným polostupňom.

Potom niekoľko prvých členov radu $a(x, y)$ je určených výrazom

$$a(x, y) = x + x^2 + 2xy + x^3 + 9x^2y + 15xy^2 + x^4 + 28x^3y + 198x^2y^2 +$$

$$+ 316xy^3 + x^5 + 75x^4y + 1610x^3y^2 + 10710x^2y^3 + 16885xy^4 + ...$$

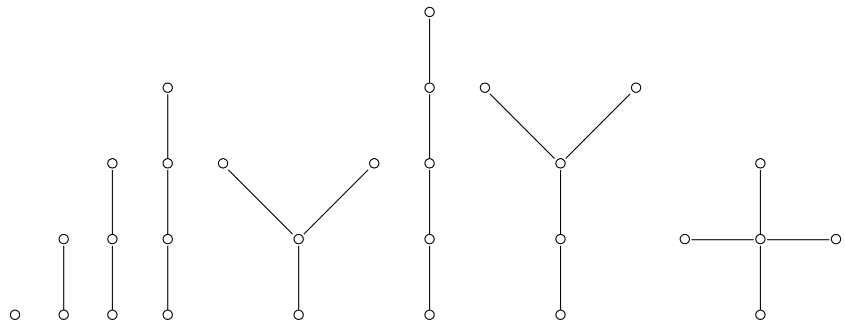
Napríklad existuje šesť spôsobov rozostavenia značiek v acyklickom orientovanom grafe D_1 a tri spôsoby ako rozostaviť značky v acyklickom orientovanom grafe D_2, ktoré sú zobrazené na obr. 1.11. Spolu teda deväť spôsobov, čo zodpovedá členu $9x^2y$ v rade $a(x, y)$.

1.7 Stromy

Stromom sa nazýva súvislý graf, ktorý nemá kružnicu. Je dobre známe, že každý netriviálny strom má aspoň dva vrcholy, ktoré majú stupeň jedna. To vyplýva z toho, že ak T je strom s n vrcholmi a q hranami, potom

$$q = n - 1 \tag{1.50}$$

Všetky stromy s nie viacej ako piatimi vrcholmi sú zobrazené na obr. 1.12 spolu s počtami spôsobov, ktorými môžu byť označené.



1 1 3 12 4 60 60 5

Obrázok 1.12: Stromy, rády ktorých nie sú vyššie ako 5, a počet spôsobov rozdelenia značiek u každého z týchto stromov.

Odtiaľ vyplýva, že počet t_n označených stromov s n vrcholmi má nasledujúce najmenšie hodnoty: 1, 1, 3, 16, 125. Mnohí autori správne predpokladali, vychádzajúc z tejto postupnosti hodnôt, že formula na spočítavanie označených stromov je daná nasledujúcou vetou.

Veta 1.7.1 (Cayley) Počet t_n označených stromov rádu n je rovný

$$t_n = n^{n-2}. \tag{1.51}$$

Toto tvrdenie dokážeme niekoľkými spôsobmi, no zároveň poznamenávame, že existuje ešte celý rad ďaľších dôkazov, ktoré su zaujímavé a možno ich nájsť časopiseckej a monografickej literatúre.

Cayley vyslovil predpoklad, že existuje vzťah medzi označenými stromami a funkciami zobrazujúcimi množinu s $n-2$ objektami do množiny s n objektami. Napríklad, ak $n = 5$, potom existuje 5^3 funkcií z $\{a, b, c\}$ do $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Tieto funkcie vyčíslujeme mnohočlenom

$$(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5)^3. \tag{1.52}$$

Sčítance tohto mnohočlena priraďujeme funkciám prirodzeným spôsobom. Napríklad v_4^3 zodpovedá konštantnej funkcií $f(x) = v_4$, sčítanec $3v_1v_3^2$ zodpovedá trom funkciám, ktoré zobrazujú len jeden prvok na v_1 a ostatné dva na v_3 a $6v_2v_3v_5$ dáva šesť funkcií zobrazujúcich po jednom prvku do v_2, v_3 a v_5.

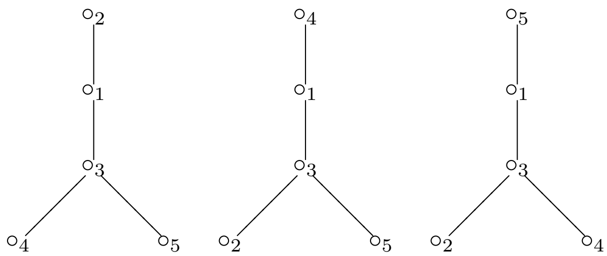
Teraz vynásobime mnohočlen (1.52) s $v_1v_2v_3v_4v_5$ a dostávame

$$(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5)^3 v_1v_2v_3v_4v_5. \tag{1.53}$$

Ustanovujeme tým rovným vzťah medzi sčítancami z tohoto súčinu a označenými stromami rádu 5. Tento vzťah s použitím sčitanca $3v_1^2v_2v_3^3v_4v_5 = 3v_1v_3^2(v_1v_2v_3v_4v_5)$ demonštrujeme na obrázku 1.13. Poznamenávame, že v stromoch zodpovedajúcich sčítancovi $v_1^2v_2v_3^2v_4v_5$, stupeň vrchola označeného číslom k je rovný exponentu mocniny u v_k.

Platnosť tohto výroku môže byť dokázaná aj vo všeobecnom prípade. Počet označených stromov, u ktorých vrcholy označené číslom k majú stupeň d_k, je rovný polynomickému koeficientu

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, d_2 - 1, ..., d_n - 1} \tag{1.54}$$



Obrázok 1.13: Označené stromy vyčíslené výrazom $v_1^2 v_2 v_3^2 v_4 v_5$.

Najprv uvedieme kombinatorický význam polynomických koeficientov.

$$\binom{n}{n_1,\dots,n_k} = |\{f : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,k\} : |f{-}(i)| = n_i\}|$$

kde $n_1,...,n_k \in \mathbb{N}^+$ a $n_1 + ... + n_k = n$, teda polynomický koeficient nám počíta počet tzv. predpísaných surjekcií z množiny $\{1,2,...,n\}$ na množinu $\{1,2,...,k\}$.

Nech $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$ sú kladné celé čísla. Označme $t(n;d_1,...,d_n)$ počet rôznych stromov G na danej množine $V = \{v_1,...,v_n\}$, ktoré spĺňajú podmienku $d_G(v_i) = d_i$. Potom

$$t(n;d_1,...,d_n) = \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, ..., d_n-1}.$$

Podľa definície

$$\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, ..., d_n-1} = 0$$

ak

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) \neq 2.$$

To je však v poriadku, lebo ak je G strom, potom $\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2n-2$. Pretože $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$ sú kladné celé čísla, je nutné aby $d_1 = 1$.

Základom dôkazu je nasledujúca rekurencia:

$$t(n;d_1,...,d_n) = \sum_{d_i \geq 2} t(n-1; d_2, ..., d_i - 1, ..., d_n) \qquad d_i \geq 2 \tag{1.55}$$

Na pravej strane vzorca spočítavame cez všetky i, pre ktoré platí $d_i \geq 2$. Platnosť vzťahu ukážeme nasledovne: nech G_i je množina všetkých stromov $G = (V,E)$, pre ktoré $d_G(v_j) = d_j$ pre $j = 1,2,...,n$ a naviac $\{v_1, v_i\} \in E$. G_i sú disjunktné množiny a naviac $G_i = \emptyset$, ak $d_i = 1$. Zrejme $\bigcup G_i$ je množina všetkých stromov na množine V a konečne platí

$$|G_i| = t(n-1, d_2, .., d_i - 1, ..., d_n)$$

v prípade, že $d_i \geq 2$. Odtiaľ vyplýva výsledok (1.55).

Tvrdenie vety teraz dokážeme indukciou vzhľadom na n. Pre $n = 2$ tvrdenie platí, lebo

$$\binom{0}{0,0} = 1.$$

Použitím vzťahu (1.55) na základe indukčného predpokladu pre $n \geq 2$ dostávame, že

$$t(n;d_1,...,d_n) = \sum \binom{n-3}{d_1-1, ..., d_i-2, ..., d_n-1}$$

kde spočítavame cez všetky i pre ktoré $d_i \geq 2$. Platí však vzťah:

$$\sum \binom{n-3}{d_1-1, ..., d_i-2, ..., d_n-1} = \binom{n-2}{d_1-1, ..., d_n-1}$$

ktorý ihneď vyplýva napríklad z kombinatorického významu polynomického koeficientu. To dokazuje našu vetu.

Dôsledok 1.7.1 Počet stromov na danej n-vrcholovej množine je n^{n-2}.

Dôkaz. Stačí nám vedieť, že platí:

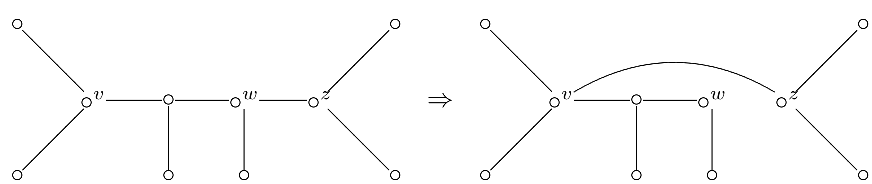
$$\sum \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, ..., d_n-1} = (1 + ..\text{n krát}.. + 1)^{n-2}$$

kde spočítavame cez všetky usporiadané n-tice kladných prirodzených čísel, pre ktoré platí $d_1 + d_2 + ... + d_n = 2n-2$. To však vyplýva priamo po dosadení do polynomického vzorca. □

Označme $t_n(k)$ počet označených stromov s n-vrcholmi, v ktorých vybraný vrchol, povedzme v, má stupeň k. Budeme hľadať výraz pre $t_n(k)$ a potom potrebný výsledok pre celkový počet stromov na n vrcholoch dostaneme spočítaním podľa k od 1 do $n-1$.

Nech A je ľubovoľný označený strom rádu n, v ktorom $deg(v) = k-1$. Vynechanie ľubovoľnej hrany $\{w, z\}$ z A neincidentnej s v nám dáva dva podstromy, z ktorých jeden obsahuje v a jeden z vrcholov w alebo z (pripusťme, že w) a druhý obsahuje z. Ak spojíme vrchol v a z, potom dostaneme strom B, v ktorom $deg(v) = k$. Dvojicu (A, B) označených stromov nazveme spojením, ak B môžeme dostať z A spôsobom opísaným vyššie. Naša úloha je spočítať počet všetkých možných spojení (A, B).

A B



Pretože A môžeme vyrobiť ľubovoľným z $t_n(k-1)$ spôsobov a B sú jednoznačne určené hranou $\{w, z\}$, ktorú môžeme vybrať $(n-1)-(k-1)$ spôsobmi, potom počet všetkých spojení (A, B) je rovný $(n-k)t_n(k-1)$. Z druhej strany, nech B je označený strom, v ktorom $deg(v) = k$ a nech $t^1, t^2, ..., t^k$ sú podstromy, ktoré dostaneme z B vynechaním vrchola v s každou hranou s ním incidentnou. Potom označený strom A, u ktorého je $deg(v) = k-1$, môžeme dostať z B vynechaním jednej z týchto hrán (povedzme $\{v, w_i\}$, kde w_i leží v t^i), a spojením w_i s ľubovoľným vrcholom u patriacim ľubovoľnému podstromu t^j. Je zrejmé, že zodpovedajúca dvojica (A, B) označených stromov tvorí spojenie, a že všetky všetky spojenia môžeme dostať takýmto spôsobom. Pretože B môžeme vybrať $t_n(k)$ spôsobmi a počet hrán spájajúcich w_i s vrcholmi ľubovoľného iného podstromu t^j je rovný $(n-1)-n_i$ (kde n_i označuje počet vrcholov t^i). Potom počet všetkých spojení (A, B) je rovný

$$t_n(k)[(n-1-n_1) + ... + (n-1-n_k)] = (n-1)(k-1)t_n(k)$$

pretože $n_1 + ... + n_k = n-1$.

Takýmto spôsobom sme ukázali, že

$$(n-k)t_n(k-1) = (n-1)(k-1)t_n(k)$$

Pomocou iterácií, ak berieme do úvahy zrejmú rovnosť $t_n(n-1) = 1$, dostávame, že $t_n(k) = \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$. Ak spočítame podľa všetkých možných hodnôt k, dostávame, že počet t_n -

označených stromov s n vrcholmi - je rovný

$$t_n = \sum_{k=1}^{n-1} t_n(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1} = \big((n-1)+1\big)^{n-2} = n^{n-2}$$

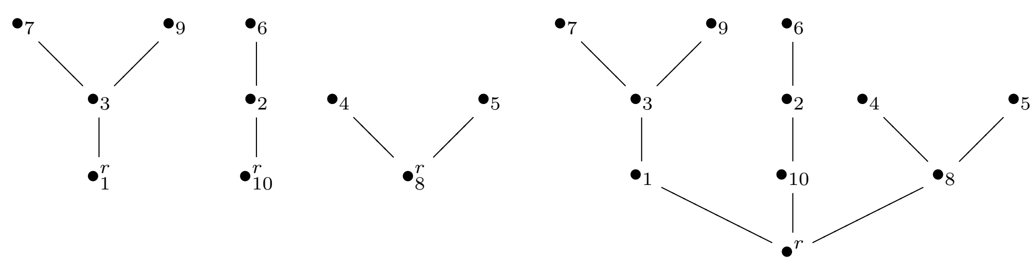
Dôsledok 1.7.2 Počet kostier K_n je rovný n^{n-2}.

1.7.1 Polyova metóda

Ďalej rozoberieme Polyovu metódu pre nájdenie počtu označených stromov. Pretože počet zakorenených označených stromov rádu n je rovný nt_n, potom exponenciálna generujúca funkcia pre tieto stromy je určená výrazom:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} nt_n \frac{x^n}{n!}. \tag{1.56}$$

Polya našiel funkcionálnu rovnicu pre y a potom pre nájdenie t_n aplikoval Lagrangeovu inverznú formulu. Túto funkcionálnu rovnicu pre y teraz odvodíme. Z lemy pre násobenie exponenciálnych generujúcich funkcií pre označné grafy vyplýva, že $\frac{y^n}{n!}$ je exponenciálna generujúca funkcia pre n-množiny zakorenených označených stromov. Tieto n-množiny zodpovedajú práve tým zakoreneným označeným stromom, u ktorých má koreň stupeň n a nie je označený. Presnejšie povedané, tento vzťah dostávame tak, že spočiatku pridáme ku každej n množine nový vrchol, no neoznačíme ho, potom spojíme tento nový vrchol s každým zo starých koreňov (pozri obr. 1.14)



Obrázok 1.14: 3-množina zakorenených stromov zodp. strom, ktorého koreň má stupeň 3.

Vynásobenie výrazu $\frac{y^n}{n!}$ výrazom x zodpovedá pripísanie značky novému koreňu a začlenením ho do počtu spočítavaných vrcholov. Takýmto spôsobom $x\frac{y^n}{n!}$ spočítava zakorenené označené stromy, u ktorých koreň má stupeň n. Ak spočítame podľa n dostaneme

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} x\frac{y^n}{n!} \tag{1.57}$$

a teda dostávame funkcionálnu rovnicu

$$y = xe^y. \tag{1.58}$$

Aby sme dostali riešenie rovnice (1.58) vyjadríme y ako funkciu premennej x a budeme aplikovať špeciálny prípad Lagrangeovej formuly.

Inverzná Lagrangeova formula

Definícia 1.7.1 Hovoríme, že funkcia f je analytická v bode a, ak existuje také okolie bodu a, že v každom jeho bode má f spojitú deriváciu (spojitá sa dá vynechať).

Nech funkcia $\phi(y)$ je analytická v niektorom okolí bodu $y = 0$ (t.j. analytická v každom bode okolia), potom rovnica

$$x = \frac{y}{\phi(y)} \tag{1.59}$$

má jediné riešenie určené generujúcou funkciou

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \tag{1.60}$$

koeficienty ktorej sú určené formulou

$$c_k = \frac{1}{k!}\left(\left(\frac{d}{dy}\right)^{k-1}(\phi(y))^k\right)_{y=0}. \tag{1.61}$$

Ak aplikujeme inverznú formulu k rovnici (1.58), kde $\phi(y) = e^y$, dostávame

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} k^{k-1}\frac{x^k}{k!}. \tag{1.62}$$

Porovnaním tohto výrazom z (1.56) opäť dostávame formulu n^{n-2} pre t_n.

Zovšeobecnená Lagrangeova metóda

Pri riešení niektorých enumeračných úloh pre označnené objekty je vhodné použiť zovšeobecnenú formulu (1.61). K podmienkam, kladeným na funkciu ϕ, predpokladáme, že je daná ešte jedna funkcia $f(y)$ analytická v niektorom okolí bodu $y = 0$. Zovšeobecnená Lagrangeova metóda tvrdí, že funkcia $f(y)$ môže byť vyjadrená mocninovým radom premennej x nasledujúcim spôsobom:

$$f(y) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\left(\left(\frac{d}{dy}\right)^{k-1}\left(f'(y)\phi^k(y)\right)\right)_{y=0} \tag{1.63}$$

Pri $f(y) = y$ z tejto formuly dostávame (1.60) a (1.61).

1.7.2 Dôkaz so stavovcami

Definujeme, čo je to stavovec na množine vrcholov V uvažovaného úplného grafu K_n (pozri nasledujúci obr. (a)): je to kostra, u ktorej je jeden vrchol označený štvorčekom a jeden vrchol krúžkom (vylučujeme, že jeden a ten istý vrchol je označený štvorčekom a krúžkom). Označme množinu všetkých stavovcov písmenom O.

Z každej kostry môžeme vytvoriť práve n^2 rôznych stavovcov, preto počet všetkých kostier je rovný $\frac{|O|}{n^2}$. Ukážeme teraz:

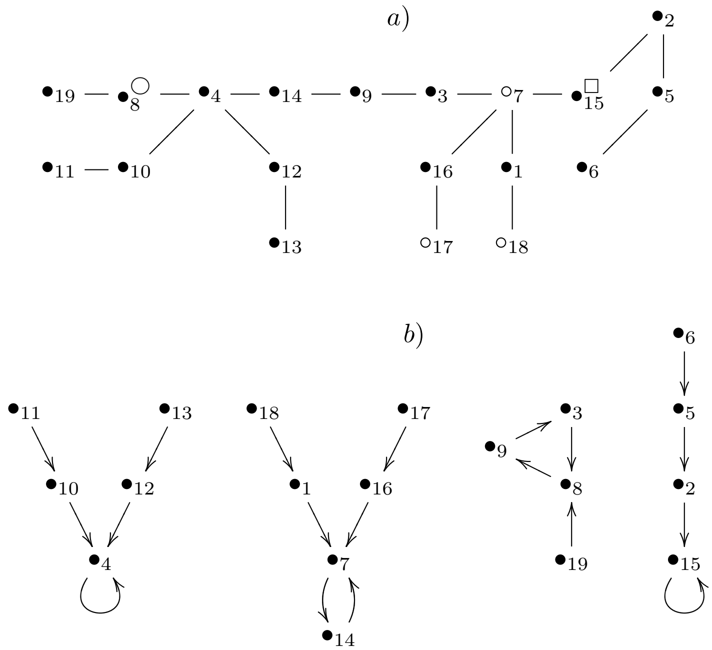
Lema 1.7.1 Existuje bijekcia f medzi množinou O všetkých stavovcou a množinou všetkých zobrazení množiny V do seba, do množiny V.

Počet zobrazení n prvkovej množiny do seba je n^n, stavovcov je podľa lemy rovnako, a teda kostier je n^{n-2}.

Dôkaz. Konštrukciu bijekcie f ukážeme na príklade. Výjdeme zo stavovca O nakresleného na obrázku (a). Označené vrcholy $\bigcirc$ a $\square$ sú spojené jedinou cestou, ktorú nazveme chrbtica.

Vypíšeme si čísla vrcholov chrbtice do riadku v poradí podľa veľkosti, a potom do ďalšieho riadku znova v poradí, ako idú od $\bigcirc$ k $\square$:

3	4	7	8	9	14	15
8	4	14	9	3	7	15



Obrázok 1.15: (a) Stavovec o 19 vrcholoch, (b) jemu zodpovedajúci graf zobrazení.

Definujeme teraz na vrcholoch chrbtice pomocný orientovaný graf P: urobíme šípku z každého vrcholu z horného riadku do vrcholu napísaného pod ním v dolnom riadku. Pretože z každého vrcholu vychádza práve jedna sípka a taktiež do každého vrcholu jedna šípka vchádza, je graf P disjunktným zjednotením orientovaných cyklov (prípadne samotných vrcholov so slučkou). Môžeme taktiež povedať, že chrbtica definuje permutáciu svojich vrcholov a P pozostáva práve z cyklov tejto permutácie. V našom príklade sú postupnosti vrcholov týchto cyklov, porovnané v poradí podľa šipiek, $(3,8,9)$, (4), $(7,14)$ a (15).

Pozrime sa teraz naspäť na stavovec O. Odoberieme z neho na chvíľu všetky hrany chrbtice, rozpadne sa na jednotlivé komponenty (opäť stromy). Orientujme hrany každého komponentu tak, že smerujú k (jedinému) vrcholu chrbtice v tomto komponente. Tým vznikne ďaľšia množina orientovaných hrán na množine V.

Definujme teraz orientovaný graf G na množine V, ktorého hranami budú jednak práve definované orientované hrany komponent, jednak všetky hrany pomocného grafu P. Na obrázku je to veľmi názorné: nakreslíme cykly grafu P, a potom ku každému vrcholu (pôvodne chrbtice) prikreslíme strom, ktorý cez neho bol zavesený na chrbticu stavovca, viď. obr. (b).

Tvrdíme teraz, že výsledný orientovaný graf G je grafom zobrazenia, to znamená, že z každého vrchola vychádza práve jedna hrana. Pre vrcholy chrbtice sme ho už skonštruovali. Pre ostatné vrcholy je to preto, že v stavovci O z nich vedie jediná cesta do chrbtice.

Definujeme teda konečné zobrazenie $f = F(O) : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ prislúchajúce stavovcu O. Pre každé i, čo je vrchol grafu G, položíme $f(i) = j$, kde j je ten vrchol G, do ktorého ide šípka z i. V našom konkrétnom prípade dostávame zobrazenie

$$\begin{aligned}
1 &\to 7\\
2 &\to 15\\
3 &\to 8\\
4 &\to 4\\
5 &\to 2\\
6 &\to 5\\
7 &\to 14\\
8 &\to 9\\
9 &\to 3\\
10 &\to 4\\
11 &\to 10\\
12 &\to 4\\
13 &\to 12\\
14 &\to 7\\
15 &\to 15\\
16 &\to 7\\
17 &\to 16\\
18 &\to 1\\
19 &\to 8
\end{aligned}$$

Takto každý stavovec určuje zobrazenie.

Zostáva nám ešte ukázať, že z takto zostrojeného zobrazenia môžeme zpätne pôvodného stavovca zrekonštruovať, a že každé zobrazenie sa dostane z nejakého stavovca.

□

1.7.3 Dôkaz zatiaľ asi najjednoduchší

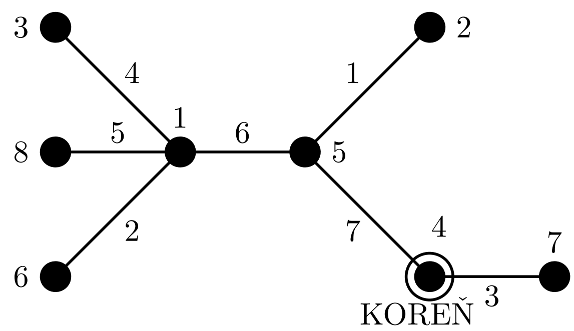
Aj v dobre preskúmaných oblastiach matematiky je čo objavovať. Tak napríklad celkom nedávno našiel matematik – štatistik Jim Pitman z Kalifornskej univerzity v Berkeley nový, veľmi jednoduchý dôkaz Cayleyho formuly. Zažiari v ňom počítanie dvoma spôsobmi, zdanlivo veľmi jednoduchý trik, o jeho užitočnosti sme sa už presvedčili napríklad pri počítaní eulerovských grafov. Nepoužije sa priamo, ale na vhodné zjemnenie pôvodnej úlohy.

V tomto dôkaze Cayleyho formuly budeme počítať dvoma spôsobmi povykosy. Čo je to povykos? Skrátený názov pre postup výroby koreňového stromu. Formálne je povykos definovaný ako usporiadaná trojica $(T, r, \check{c})$, kde T je strom na množine vrcholov $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $r \in V$ je jeho koreň a $\check{c}$ je očíslovanie hrán, alebo bijekcia $\check{c} : E(T) \to \{1, 2, \dots, n-1\}$. Na obrázku je príklad povykosu.

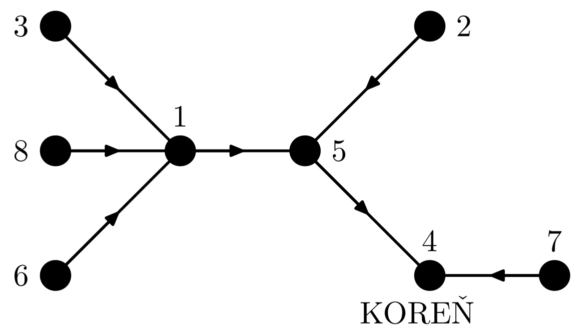
Môžeme si predstavovať, že začneme s prázdnym grafom na množine vrcholov V a vyrábame koreňový strom postupným pridávaním hrán; očíslovanie $\check{c}$ kóduje poradie pridávania hrán. Pre každý strom T môžeme koreň r voliť n spôsobmi a pre očíslovanie hrán $\check{c}$ je $(n-1)!$ možností, takže počet povykosov je $n(n-1)!t_n$.

Pre druhý spôsob počítania povykosov budeme koreňový strom uvažovať ako orientovaný strom, kde všetky šípky smerujú ku koreňu.

Naopak, každá orientácia stromu, pre ktorú existuje práve jeden vrchol, ktorý nie je počiatkom žiadnej šípky odpovedá jednoznačne koreňovému stromu (zmienený jediný vrchol je koreň). Aj povykos teraz budeme interpretovať v tejto orientovanej podobe a budeme počítať, koľko povykov môžeme dostať, ak začneme z prázdneho orientovaného grafu a budeme postupne pridávať šípky v $n-1$ krokoch.



Obrázok 1.16: Príklad povykosu.



Obrázok 1.17: Orientovaný strom, kde všetky šípky smerujú ku koreňu.

Prvá šípka musí spojovať dva rôzne vrcholy, a teda môžeme ju pridať $n(n-1)$ spôsobmi. Pre druhú šípku v poradí máme ešte ďalšie obmedzenie (obmedzujúcu podmienku): nesmie vychádzať z toho istého vrchola ako šípka prvá. Aké sú všeobecné obmedzenia na pridanie ďalšej šípky?

(A) Nesmieme vytvoriť kružnicu (v neorientovanom zmysle), teda nová šípka musí spojovať dva rôzne komponenty vytvoreného grafu (komponenty sa opäť myslia bez ohľadu na orientáciu).

(B) Na konci musí z každého vrcholu až na jediný vychádzať nejaká šípka, pričom máme k dispozícii $n-1$ šípiek. Nesmieme teda premárniť ani jedinú, a každá nová šípka musí vychádzať z vrchola, z ktorého dosposiaľ žiadna šípka nevychádzala.

Kľúčové pozorovanie je, že v každom komponente už vytvoreného grafu je práve jeden vrchol, z ktorého nevychádza žiadna šípka. To je preto, že komponent má nejakých m vrcholov a $m-1$ hrán, a z každého vrchola vychádza nanajvýš jedna šípka, lebo sme aj v predchádzajúcom postupe dodržiavali podmienku (B).

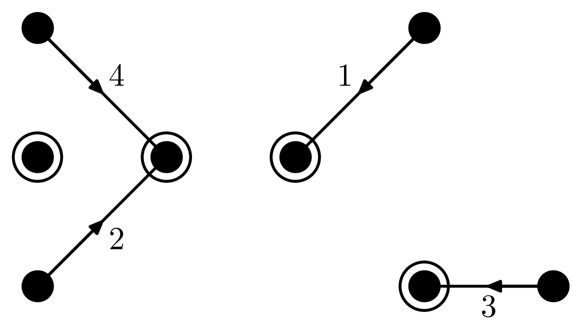
Po pridaní k šípiek s dodržiavaním (A) a (B) má graf $n-k$ komponent (overte). Obrázok ukazuje situáciu po pridaní štyroch šípok podľa povykosu na prvom obrázku:

Ďalšia šípka, číslo $k+1$, môže teraz viesť do ľubovoľného vrcholu v nejakom z komponentov, a vychádzať musí z koreňa niektorého iného komponentu, a pre jej pridanie máme preto $n(n-k-1)$ možností.

Každý taký postup dáva po $n-1$ krokoch práve jeden povykos. Preto povykosov je

$$\prod_{k=0}^{n-2} n(n-k-1) = n!n^{n-2}.$$

Porovnaním obidvoch výrazov pre počet povykosov dostávame $t_n = n^{n-2}$.

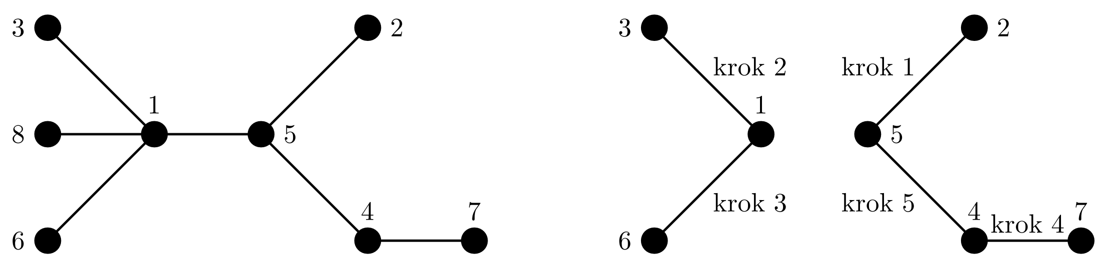


Obrázok 1.18: Situácia po pridaní štyroch šípok podľa povykosu na prvom obrázku.

1.7.4 Dôkaz pomocou Prüferovho kódu

Ukážeme, ako každú kostru grafu K_n zakódujeme $(n-2)$-člennou postupnosťou, ktorej každý člen je niektoré z čísel $1, 2, \ldots, n$. Toto kódovanie bude definovať bijekciu medzi všetkými kostrami a všetkými postupnosťami uvedeného typu. Pretože takých postupností je zrejme n^{n-2}, bude tým Cayleyho formula dokázaná.

Majme kostru T; príklad pozri nasledujúci obrázok (a).



(a) Kostra s kódom $(5, 1, 1, 4, 5, 1)$.

(b) Postup jej rekonštrukcie z kódu.

Obrázok 1.19: Kostra s kódom $(5, 1, 1, 4, 5, 1)$ a postup jej rekunštrukcie z kódu.

Popíšeme, ako zostrojíme postupnosť $P = P(T) = (p_1, \ldots, p_{n-2})$, tzv. Prüferov kód kostry T. Základná myšlienka (trochu vandalská) je, že zo stromu T budeme postupne odtrhávať listy, pokým z neho neostane len jediná hrana. Budeme teda konštruovať pomocnú postupnosť stromov $T_0 = T, T_1, T_2, \ldots, T_{n-2} = K_2$ a pritom vyrábať postupnosť P. Predpokladajme, že už sme skonštruovali T_{i-1} (na začiatku máme $T_0 = T$). Ako vieme, má aspoň jeden list (vrchol stupňa jedna). Vezmeme najmenší z listov T_{i-1} (pripomeňme, že vrcholy T sú čísla $1, 2, \ldots, n$), a utvoríme T_i odstránením tohoto listu z T_{i-1}, spolu s príslušnou hranou. Pritom definujeme i-ty člen, p_i, konštruovanej postupnosti ako suseda práve odtrhnutého listu (teda nie ako list sám, to je hlavný trik!). Urobíme toto pre $i = 1, 2, \ldots, n-2$, definovali sme postupnosť $P = P(T)$.

Predpokladajme teraz, že daná postupnosť P vznikla vyššie uvedenou konštrukciou z nejakej (nám doposiaľ neznámej) kostry T. Odvodíme, ako spätne vytvoriť T. Pýtajme sa, ako z postupnosti P poznať, ktorý vrchol kostry T bol odtrhnutý ako prvý; označme ho l_1 (musel to byť list). Zrejme l_1 sa nesmie vyskytovať nikde v postupnosti P (pretože do P sa zapisujú len vrcholy doposiaľ prítomné v otrhanom strome). Ďalej každý vrchol, ktorý nie je obsiahnutý v množine $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}\}$, musí byť listom stromu T (inak by sme od neho v niektorej fáze odtrhli list a tým by sa ocitol v postupnosti P). Podľa pravidla odtrhávania listov je teda l_1 minimum z množiny $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}\}$. Táto množina je vždy neprázdna, a preto je minimum dobre definované. Môžeme teraz l_1 nakresliť ako prvý vrchol kostry, a pripojiť k nemu hranou vrchol p_1 ako na obrázku 1.19 (b).

Ďalej postupujeme podobne; ak poznáme už listy $l_1, l_2, \ldots, l_{i-1}$ odtrhnuté v krokoch 1 až $i-1$, budeme určovať list l_i. Nemôže to byť žiaden z vrcholov $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_{n-2}$, a ovšem ani z $l_1, \ldots, l_{i-1}$ – bude to teda minimum množiny $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{p_i, p_{i+1}, \ldots, p_{n-2}, l_1, l_2, \ldots, l_{i-1}\}$ (tá je zasa neprázdna). Takto určený list l_i pripojíme hranou k vrcholu p_i. Ak nie je l_i doposiaľ nakreslený, nakreslíme ho ovšem taktiež, podobne pre p_i. Prvých 5 krokov tejto konštrukcie je znázorenených na obrázku 1.19 (b), v 6. kroku by sme dokreslili hranu $\{1, 5\}$.

Po $n-2$ krokoch sme nakreslili $n-2$ hrán kostry T, menovite všetky, ktoré boli pri odtrhávaní odstránené, zostáva určiť, ktorá bola posledná zostávajúca hrana. Jeden jej koniec musí byť p_{n-2}, teda sused posledného odtrhnutého listu, a druhý koniec jeden vrchol, ktorý sa nevyskytuje medzi všetkými odtrhnutými listami $l_1, \ldots, l_{n-2}$ a je rôzny od p_{n-2}. Na obrázku 1.19 to bude hrana $\{1, 8\}$. Tým je metóda rekonštrukcie popísaná. Ešte ju kvôli prehľadnosti zhrnieme.

Použijeme dvojriadkového zápisu. Do prvého riadku zapíšeme čísla $p_1, p_2, \ldots, p_{n-3}, p_{n-2}, p_{n-2}$ (teda $n-1$ čísel, pričom p_{n-2} na konci sa opakuje, týmto opakovaním sa elegantne zahrnie posledný, výnimočný krok do všeobecného pravidla). Do druhého riadku postupne vyplňujeme čísla $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$. Ak boli už vyplnené čísla l_1 až l_{i-1}, potom číslo l_i je najmenšie také, že sa nevyskytuje medzi predchádzajúcimi číslami v dolnom riadku ani medzi číslami v hornom riadku od i-tej pozície (vrátane) vpravo:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
p_1 & p_2 & \cdots & p_{i-1} & p_i & p_{i+1} & \cdots & p_{n-3} & p_{n-2} & p_{n-2} \\
e_1\Big| & e_2\Big| & & e_{i-1}\Big| & & & & & & \\
l_1 & l_2 & \cdots & l_{i-1} & \Box & & & & &
\end{array}
$$

Obrázok 1.20: Dvojriadkový zápis.

Na silne orámovanú pozíciu prijde najmenšie číslo, ktoré nie je medzi číslami

$$l_1, \ldots, l_{i-1}, p_i, pi + 1, \ldots, p_{n-2}.$$

Hrany $e_1, e_2, \ldots$ rekonštruovanej kostry spájajú vždy vrchol z horného riadku s vrcholom napísaným pod ním.

Pre ľubovoľnú $(n-2)$-člennú postupnosť P vytvorí práve uvedený algoritmus nejaký graf G na množine vrcholov $\{1, 2, \ldots, n\}$ s $n-1$ hranami. Tiež vieme, že ak postupnosť P pochádzala z nejakej kostry T, platí $G = T$. Naša úloha sa týmto nekončí: musíme sa presvedčiť, že graf G, ktorý vznikne je vždy strom, a že jeho spätným prekódovaním do postupnosti dostaneme tú postupnosť, z ktorej sme vyšli.

Označme $G_i = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{e_i, e_{i+1}, \ldots, e_{n-1}\})$. Z algoritmu vyplňovania dolného riadku je vidieť, že do vrchola l_i zasahuje hrana e_i a žiadna z hrán $e_{i+1}, \ldots, e_{n-1}$ už do l_i zasahovať nemôže, takže l_i má v G_i stupeň 1. Teda G_i vznikne z G_{i+1} pridaním listu, a z tvrdenia o postupnej výstavbe stromu (viď poznámka na konci dôkazu) vidíme, že G je strom. Vo všeobecnosti G_i je strom plus $i-1$ izolovaných vrcholov.

Zostáva nám overiť, že l_i je najmenší z listov grafu G_i. Podľa definície l_i by menší list mohol byť jedine medzi $l_1, l_2, \ldots, l_{i-1}$ alebo medzi $p_i, \ldots, p_{n-2}$. Prvá skupina neprichádza do úvahy (pretože $l_1, \ldots, l_{i-1}$ majú v G_i stupne 0). Uvážme vrchol p_k, $i < k \leq n-2$. V grafe G_k je to sused listu l_k, a pretože G_k zostáva z izolovaných vrcholov a jedného ďalšieho komponentu, ktorý má aspoň 2 hrany, má p_k v grafe G_k stupeň minimálne 2. Takže ani v G_i nie je p_k listom.

Teda l_i je najmenší list v G_i a G_{i+1} naozaj vznikne z G_i podľa procedúry Prüferovho kódovania kostry. Tým je dôkaz tvrdenia ukončený.

Na koniec uvádzame kvôli úplnosti nasledujúce triviálne tvrdenie:

Poznámka 1.7.1 Postupná výstavba stromu. Pre daný graf G a jeho visiaci vrchol v sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

a) G je strom.

b) $G - v$ je strom.

1.7.5 Dôkaz pomocou lineárnej algebry

Nech G je označený graf rádu n s množinou vrcholov $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Definujme maticu typu $n \times n$. Nech $B = B(G)$, v ktorej kladieme

$$B_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{ak vrcholy } i \text{ a } j \text{ sú susedné,} \\ 0 & \text{ak } i \neq j \text{ a vrcholy } i \text{ a } j \text{ nie sú susedné,} \\ \deg i & \text{ak } i = j. \end{cases}$$

Maticu $B(G)$ nazývame Kirchhoffovou maticou grafu G. Súčet prvkov v každom riadku a v každom stĺpci tejto matici je rovný nule.

Lema 1.7.2 Nech B je ľubovoľná číselná $n \times n$-matica taká, že v každom riadku a v každom stĺpci je súčet elementov rovný nule.

$$\sum_{j=1}^{n} B_{ij} = 0, i = \overline{1, n}, \qquad \sum_{i=1}^{n} B_{ij} = 0, j = \overline{1, n}.$$

Potom algebraické doplnky všetkých prvkov matice B sú navzájom rovné. (Špeciálne túto vlastnosť má aj Kirchhoffova matica ľubovoľného grafu).

Dôkaz. Je zrejmé, že hodnosť matice B je menšia ako n. Lebo vektory, ktoré tvoria maticu B sú lineárne závislé. Ak je hodnosť matice B menšia ako $n - 1$, potom algebraické doplnky všetkých prvkov tejto matice sú rovné 0. Nech hodnosť matice B je rovná $n - 1$ a C je priradená matica pre maticu B, t.j. prvok C_{ij} je rovný algebraickému doplnku A_{ji} prvku B_{ji} v matici B, $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$. Z lineárnej algebry je známe, že $BC = (\det B) \cdot E$, v našom prípade $\det B = 0$, pričom E je jednotková matica a $B \cdot C = 0$. Z toho vyplýva, že pre stĺpce matice C s číslom j, $j = \overline{1, n}$ platia rovnosti

$$B_{i1}C_{1j} + B_{i2}C_{2j} + \ldots + B_{in}C_{nj} = 0, i = \overline{1, n}$$

t.j.

$$B_{i1}A_{j1} + B_{i2}A_{j2} + \ldots + B_{in}A_{jn} = 0, i = \overline{1, n}.$$

Tieto rovnosti môžeme považovať ako systém lineárnych homogénnych rovníc s maticou B vzhľadom na neznáme $A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jn}$.

Pretože hodnosť matice B je rovná $n - 1$, potom všetky riešenia uvažovaného systému sú násobkami vektora $(1, \ldots, 1)$, ktorý vyhovuje systému, preto

$$A_{j1} = A_{j2} = \ldots = A_{jn}, j = \overline{1, n},$$

ak berieme do úvahy, že $CB = 0$, analogicky dostávame

$$A_{1i} = A_{2i} = \ldots = A_{ni}, i = \overline{1, n},$$

z toho vyplýva, že

$$A_{ij} = A_{kl}, i, k, j, l = \overline{1, n}.$$

□

Nakoniec definujme maticu incidencie grafu. Nech G je (n, m)-graf. $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ a $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Definujme binárnu $n \times m$-maticu $I = I(G)$ podmienkami:

$$I_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{ak vrchol } k \text{ a hrana } e_k \text{ incidujú,} \\ 0 & \text{v opačnom prípade.} \end{cases}$$

Matica I sa nazýva maticou incidencie grafu G. V každom jej stĺpci sú práve dve jednotky. Vzťah $G \to I(G)$ je bijekcia množiny označených (n, m)-grafov s očíslovanými hranami na množinu $n \times m$-matíc vyhovujúcich opísaným podmienkam.

Pre orientované grafy definovanie matice incidencie má nasledujúci tvar

$$I_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{ak vrchol } k \text{ je začiatkom orientovanej hrany } a_l, \\ -1 & \text{ak vrchol } k \text{ je koncom orientovanej hrany } a_l, \\ 0 & \text{ak vrchol } k \text{ a hrana } a_l \text{ neinciduje.} \end{cases}$$

Rovnako v prípade matíc incidencie a susednosti pre izomorfné grafy resp. orientované grafy platí nasledujúce tvrdenie.

Lema 1.7.3 Grafy (orientované grafy) sú izomorfné práve vtedy, keď vieme matice incidencie (susednosti) dostať jednu z druhej vhodným prestavením riadkov a stĺpcov. T.j. vhodným premenovaním objektov.

Poznámka 1.7.2 Štvorcovú maticu $P = (t_{ij})_{i,j=1}^{n}$ nazveme permutačná, ak jej prvky sú 0 alebo 1 a v každom riadku a v každom stĺpci matice P je práve jeden nenulový prvok. Ekvivalentne P je permutačná matica práve vtedy, keď existuje permutácia π na množine $\{1, 2, \ldots, n\}$ taká, že $a_{ij} = 1$, ak $j = \pi(i)$, a $a_{ij} = 0$ v opačnom prípade.

Potom $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sú izomorfné práve vtedy, keď $A_G = PA_{G'}^{T}$, pričom P^T je transponovaná matica k matici P.

Bezprostredne priamym výpočtom môžeme preveriť planosť nasledujúceho tvrdenia.

Lema 1.7.4 Nech B je Kirchhoffova matica grafu G a I je matica incidencie nejakej jeho orientácie H (očíslovanie vrcholov v H je to isté, ako v grafe G), potom $B = I \cdot I^T$ (tu opäť T označuje operáciu transponovania matice).

Poznamenávame, že v každom súvislom grafe existuje faktor, ktorý je strom a nazývame ho kostrou grafu. Vo všeobecnom prípade sa kostra definuje nejednoznačne. Prirodzene vzniká otázka: koľko je kostier v grafe? Počet kostier v súvislom grafe určuje implicitne nasledujúca veta.

Veta 1.7.2 (Kirchhoffova) Počet kostier v súvislom grafe G rádu $n \geq 2$ je rovný algebraickému doplnku ľubovoľného prvku Kirchhoffovej matice $B(G)$.

Dôkaz sa opiera o nasledujúce tvrdenie.

Lema 1.7.5 Nech H je $(m+1, m)$-graf, I – matica incidencie ľubovoľnej jeho orientácie, M – ľubovoľný subdeterminant (minor) rádu n matice I. Potom, ak H nie je strom, tak potom $|M| = 0$, ak H je strom, potom $|M| = \pm 1$.

Dôkaz. Predovšetkým poznamenávame, že môžeme ľubovoľne zmeniť numeráciu (očíslovanie) vrcholov a hrán grafu H, tak uvažovaný minor môže len zmeniť znamienko.

Nech a je vrchol, zodpovedajúci riadku matici I, ktorý vystupuje v minore M. Ak graf H nie je strom, potom nie je nesúvislý. Nech $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ – je oblasť súvislosti neobsahujúca vrchol a. Pomocou vhodného prečíslovania hrán grafu H maticu I prevedieme na blokovo-diagonálny tvar $I = \mathrm{diag}[I_1, I_2]$, kde I_1 matica incidencie komponenty $H(K)$. Minor M obsahuje všetkých prvých k riadkov matice I_1, ktorých súčet je rovný nulovému riadku. Z toho vyplýva, že $M = 0$. (v každom stĺpci sú dva nenulové prvky $+1$ a -1).

Nech teraz H je strom. Opäť prečíslujeme vrcholy aj hrany grafu H nasledujúcim spôsobom. Jeden z visiacich vrcholov V, rôzny od vrcholu a, taktiež hrane incidentnej vrcholu v, pripíšeme číslo 1. Ďalej uvažujeme strom $T_1 = H - v$. Ak jeho rád je väčší ako 1, potom jeden z jeho koncových vrcholov u rôzny od a, vrcholu a hrane incidentnej s u priradíme číslo 2. Uvažujeme strom $T_2 = T_1 - u$. Ak budeme iterovať tento proces, dostaneme novú numeráciu vrcholov a hrán stromu H, pričom vrchol a bude mať číslo $m+1$. Matica I pritom nadobúda tvar

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \pm 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & \pm 1 \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Tu symbol $*$ označuje tie elementy alebo bloky matice, hodnoty, ktorých nemajú vplyv na chod úvah. Minor M zostávajúci po vynechaní posledného riadku tejto matice je rovný ± 1. □

Ešte jeden fakt z lineárnej algebry použijeme pri dôkaze Kirchhoffovej vety. Formulu Binet-Cauchyho; nech A resp. B sú matice $n \times m$ resp. typu $m \times n$; $C = A \cdot B$ a $m \geq n$. Minor B' rádu n matice B nazveme zodpovedajúcim, alebo priradeným k minoru A' rádu n matice A, ak množiny čísel riadkov prvého z nich B' a čísel stĺpcov druhého z nich A' sú totožné.

Veta 1.7.3 (Formula Binet-Cauchy) Nech A resp. B sú matice $n \times m$ resp. $m \times n$, $n \leq m$ a $C = A \times B$. Potom

$$\det C = \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_n \leq m} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{1.64}$$

Inými slovami, pri $n \leq m$ determinant matice je súčtom súčinov všetkých možných minorov rádu n v A so zodpovedajúcimi (priradenými) minormi B toho istého rádu n.

Skôr než uvedieme dôkaz uvedeného tvrdenia, ilustrujeme ho nasledujúcim príkladom.

Príklad 1.7.1 Nech $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Potom $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\det C = 2$. Podľa vyššie uvedenej formuly dostávame

$$\begin{aligned} \det C &= \textstyle\sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq 3} A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \\ &+ A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-2) + 3 \cdot 0 + (-2)(-2) = 2. \end{aligned}$$

Dôkaz vety: Najprv pripomenieme, že $\det A = \sum_P (-1)^{t(P)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$, kde $t(P)$ označuje počet transpozícií permutácie P, súčet uskutočňujeme pre všetkých $n!$ permutácií.

Pretože $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$ môžeme maticu C napísať v nasledujúcom tvare

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha_1=1}^{m} a_{1\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \dots & \sum_{\alpha_n=1}^{m} a_{1\alpha_n} b_{\alpha_n n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{\alpha_1=1}^{m} a_{n\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \dots & \sum_{\alpha_n=1}^{m} a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n n} \end{pmatrix}.$$

Determinant je aditívna a homogenna funkcia každého zo svojich stĺpcov. Ak použijeme tento fakt pre každý zo stĺpcov v $\det C$, vyjadrujeme $\det C$ v tvare súčtu m^n determinantov:

$$\begin{aligned} \det C &= \sum_{\alpha_1=1}^{m} \ldots \sum_{\alpha_n=1}^{m} \det \begin{pmatrix} a_{1\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \dots & a_{1\alpha_n} b_{\alpha_n n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \dots & a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n n} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{\alpha_1=1}^{m} \ldots \sum_{\alpha_n=1}^{m} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \ldots b_{\alpha_n n}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Tie členy súčtu, ktoré majú totožné dva alebo viac indexov $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sú rovné nule, pretože v týchto prípadoch minory budú mať aspoň dva rovnaké stĺpce. Takým spôsobom treba uvažovať len tie $m!/(m-n)!$ členov súčtu, u ktorých sú indexy α rôzne. Rozdelíme všetky ostatné členy na $\binom{m}{n}$ skupín po $n!$ členov takým spôsobom, že v každej skupine rozlišujeme členy len poradím indexov $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Poznamenávame, že môžeme napísať:

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} = (-1)^{t(P)} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}, \text{ kde } k_1 < k_2 < \ldots < k_n,$$

P – permutácia $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ čísel $k_1, \ldots, k_n$. Z toho vyplýva, že súčet podľa $n!$ členov, v ktorých $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ – permutácia čísel $k_1, k_2, \ldots, k_n$ je určená výrazom

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix} \sum_P (-1)^{t(P)} b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \ldots b_{\alpha_n n}.$$

Ak prestavíme prvky b tak, aby prvé indexy boli v rastúcom poradí, prevedieme výraz na tvar

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix} \sum_Q (-1)^{t(Q)} b_{k_1 j_1} b_{k_2 j_2} \ldots b_{k_n j_n}$$

kde Q je permutácia $j_1, j_2, \ldots, j_n$ čísel $1, 2, \ldots, n$ a je zrejmé, že $t(P) = t(Q)$. Z definície funkcie determinantu teraz vyplýva, že tento výraz je proste

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Preto rovnosť (1.65) sa transformuje na rovnosť (1.64). □

Dôkaz Kirchhoffovej vety. Nech I je matica incidencie nejakej orientácie (n, m) grafu G. Vzhľadom na tvrdenie, že $B(G) = I \cdot I^T$, pretože G je súvislý graf, potom $m \geq n-1$ (aspoň strom). Nech B je podmatica zostávajúca po vynechaní posledného riadka a stĺpca z $B(G)$, nech C je podmatica, zostávajúca po vynechaní posledného riadku z I, potom v dôsledku uvedeného tvrdenia $B = CC^T$. Algebraický doplnok $A_{n,n}$ elementu, ktorý zaujíma v matici $B(G)$ pozíciu (n, n), je rovný det B. Z formuly Binet-Cauchy vyplýva, že $A_{n,n}$ je rovný súčtu štvorcov všetkých minorov rádu $n-1$ matice C. Na základe tvrdenia lemy 1.7.5 je každý minor M rovný ± 1, ak faktorový podgraf grafu G, hrany ktorého zodpovedajú stĺpcom, ktoré vystupujú v M je strom a nula v opačnom prípade. Z toho vyplýva, že $A_{n,n}$ je rovný počtu faktorových stromov v grafe G. Pretože algebraické doplnky všetkých elementov matice $B(G)$ sú rovné, potom je veta dokázaná. □

Dôsledok 1.7.3 Počet komponentov súvislosti $K(G)$ n-vrcholového grafu G je rovný : $K(G)$ – *hodnost* $B(G)$, keďže graf G je súvislý, má aspoň jednu kostru, a teda algebraický doplnok rádu $n-1$ je rôzny od nuly.

Ak graf G je súvislý, potom je v ňom obsiahnutá kostra. V súlade s predchádzajúcou vetou hodnosť $B(G) \geq n-1$. lebo inak by tam neexistovala kostra. Z druhej strany vždy $det(B(G)) = 0$. Z toho vyplýva, že hodnosť $B(G) = n-1$.

Nech teraz graf G má rovno k komponentov. Potom pri vhodnom očíslovaní vrcholov, matici $B(G)$ zodpovedá blokovo diagonálna matica $diag(B_1, B_2, ..., B_k)$, ktorej diagonalne bloky B_i sú Kirchhoffove matice zodpovedajúce komponentom. Berúc do úvahy dokázané, dostávame, že *hodnost* $B(G) = n-k$.

Dôsledok 1.7.4 Pre $n > 1$ počet kostier v kompletnom grafe K_n je rovný n^{n-2}.

Uvažujme algebraický doplnok A_{11} elementu matice

$$B(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & & & \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

zaujímajúceho pozíciu (1,1). Rovná sa determinnatu

$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & & & \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$$

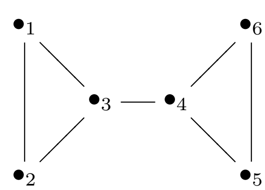
rádu $n-1$. Ďalej máme

$$A_{11} = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & & & \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

Prvý determinant vznikne pripočítaním súčtu $n-2$ riadkov k prvému riadku, druhý determinant vznikne pripočítaním prvého riadku ku každému.

Je zrejmé, že počet kostier v K_n je rovný počtu označených stromov rádu n. Preto predchádzajúci dôsledok môžeme zformovať v tvare Cayleyovej vety z roku 1897.

Príklad. Uvažujme graf G



$$B(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Podľa Kirchhoffovej vety je počet kostier grafu G rovný determinantu

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2.3 \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 6 - 3 = 9$$

Teda graf G má 9 kostier, o čom sa ľahko môžeme presvedčiť tým, že každá kostra grafu G musí obsahovať hranu $\{3, 4\}$.

Záverom poznamenávame, že Kirchhoffova veta počíta kostry pre ľubovoľný súvislý graf, nielen pre kompletné grafy.

1.8 Eulerovské orientované ťahy v orientovaných grafoch

Ukázali sme, že maticová veta o stromoch pre grafy dáva jednu z niekoľkých metód spočítania označených stromov, založenú na určení počtu kostier označeného grafu K_n. Uvedieme len formuláciu tvrdenia zovšeobecňujúceho túto vetu na orientované grafy a určujúceho počet kostier daného orientovaného grafu D, každá z nich je orientovaná v smere k niektorému svojmu vrcholu.

Hlavnou úlohou tejto časti prednášky bude aplikovať maticovú vetu o stromoch pre orientované grafy a označené eulerovské orientované grafy D, za účelom dosiahnutia presnej formuly pre počet eulerovských ťahov v orientovanom grafe D.

Vnútorný strom (vstupujúci do koreňa v) dostaneme zo zakoreneného stromu T s koreňom v orientáciou všetkých jeho hrán smerom k vrcholu v.

Vonkajší strom (vystupujúci z vrchola v) je orientáciou duálny k vnútornému stromu.

Je zrejmé, že obe tieto množiny orientovaných stromov sú vo vzájomne jednoznačnom vzťahu s množinou zakorenených stromov.

Uvažujme orientovaný graf D, ktorý je zobrazený na obr. 1.21, a ktorého vrcholy sú označené číslami $1, 2, 3, 4, 5$. Existujú práve štyri kostry, vychádzajúce z vrchola 1 a 2 kostry vstupujúce do vrchola 1.

Nech D je orientovaný graf (rozumieme orientovaný graf bez násobných hrán a orientovaných slučiek) s maticou susednosti $A = (a_{ij})$ [$a_{ij} = 1$, ak (i, j) patrí do D, ak (i, j) nepatrí do D, tak $a_{ij} = 0$]. Ďalej definujeme diagonálnu maticu M_0 – vonkajšiu, u ktorej prvok (i, i) je rovný vonkajšiemu stupňu vrchola v_i. Potom kladieme $C_0 = M_0 - A$. V takomto prípade súčet všetkých prvkov v matici C_0, ktoré sa nachádzajú v jednom riadku, je rovný nule, no nie nutne sa to spĺňa pre stĺpce. Skutočne, ako uvidíme neskôr, súčet prvkov, ktoré stoja v jednom a v tom istom stĺpci je rovný nule práve vtedy, keď D je orientovaný eulerovský graf. Analogickým spôsobom definujeme maticu $C_1 = M_1 - A$, kde M_1 je diagonálna matica, v ktorej prvok (i, i) je rovný vnútornému stupňu. Sformulujeme dôležitý výsledok:

Veta 1.8.1 (Maticová veta o stromoch pre orientované grafy) Všetky algebraické doplnky i-tého riadku matice C_0 sú si rovné navzájom a ich spoločná hodnota je počet kostier vstupujúcich do vrchola v_i v orientovanom grafe D. Duálnym spôsobom, spoločná hodnota algebraických doplnkov i-tého stĺpca matice C_1, je rovná počtu kostier vystupujúcich z vrchola v_i.

Dôkaz tohto tvrdenia nebudeme robiť, zrejme by sme postupovali podobne, ako v neorientovanom prípade, pravda s príslušnými modifikáciami.

Uvedené tvrdenie budeme ilustrovať na príklade orientovaného grafu D zobrazeného na obrázku 1.21. Matice C_0 a C_1 pre uvedený graf D majú tvar:

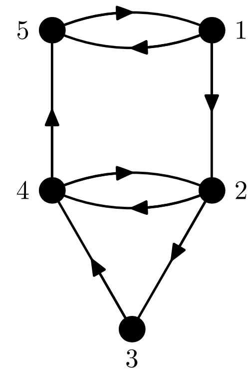
$$C_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ak ich použijeme, ihneď sa presvedčíme, že ak vezmeme prvý riadok matice C_0 a z prvého stĺpca matice C_1, dostávame, že orientovaný graf D má práve štyri kostry vychádzajúce z vrchola 1 ako na obrázku 1.21.

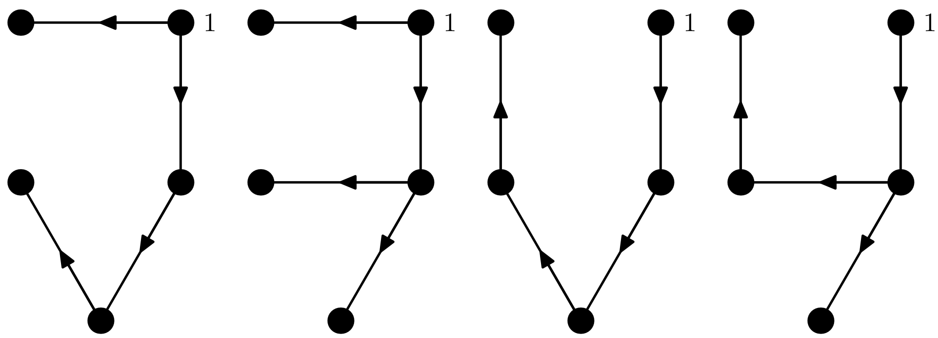
Počítajme determinanty príslušných matíc:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 1 = 2.$$

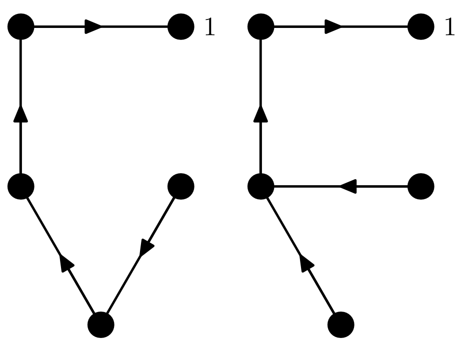
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 1 - 1)2 = 4.$$



(a) Graf D.



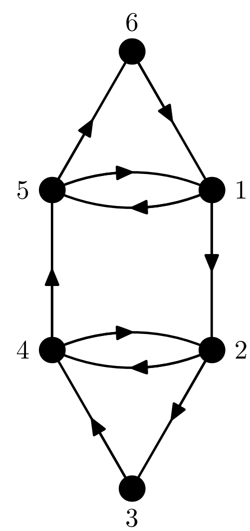
(b) Kostry vystupujúce z vrchola 1.



(c) Kostry vstupujúce do vrchola 1.

Obrázok 1.21: Kostry orientovaného grafu D, vystupujúce a vstupujúce do vrchola 1.

Orientovaný graf nazývame eulerovský, ak existuje uzavretý faktorový orientovaný ťah, prechádzajúci cez každý vrchol, pričom každú orientovanú hranu prechádza práve jedenkrát. Taký orientovaný ťah nazývame eulerovským ťahom. Jedno kritérium eulerovskosti orientovaného grafu spočíva v nasledujúcom: orientovaný graf musí byť súvislý (v neorientovanom slova zmysle) a pre každý vrchol platí, že vnútorný stupeň je rovný vonkajšiemu stupňu. Napríklad orientovaný graf uvedený na obrázku 1.21 nie je eulerovský, ale orientovaný graf zobrazený na obrázku 1.22 eulerovský je. Z definície eulerovského orientovaného grafu vyplýva, že matice C_0 a C_1 majú rovnaké diagonály, a preto sú si rovné. Pre orientovaný graf, uvedený na obrázku 1.22, táto



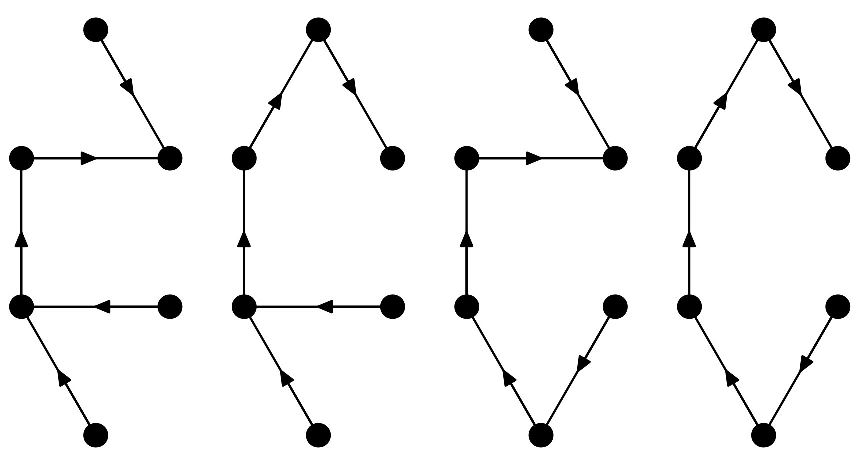
Obrázok 1.22: Eulerovský orientovaný graf.

matica má tvar:

$$C = C_0 = C_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastnosť matice C, súčet prvkov v ľubovoľnom riadku je rovný nule, taktiež súčet prvkov v ľubovoľnom stĺpci je rovný nule, t.j. všetky algebraické doplnky sa navzájom rovnajú.

Prvý krok v dôkaze maticovej vety o stromoch pre grafy spočíval v poznámke, že ak súčet elementov ľubovoľného stĺpca a taktiež súčet prvkov v ľubovoľnom riadku je rovný nule, tak potom algebraický doplnok matice má jednu a tú istú hodnotu. V dôsledku vety má každý eulerovský graf – orientovaný, rovnaký počet kostier, ktoré vchádzajú do každého vrchola a vychádzajúcich z každého vrchola. Napríklad vo vyššie uvedenej matici, všetky algebraické doplnky sú rovné 4, pretože existujú štyri kostry vstupujúce a vystupujúce z každého vrchola orientovaného grafu.



Obrázok 1.23: Kostry vstupujúce do vrchola v_1, v orientovanom grafe na obrázku 1.22.

Teraz máme všetko pripravené na to, aby sme mohli aplikovať maticovú vetu o stromoch pre orientované grafy na odvodenie formuly pre počet eulerovských uzavretých ťahov v danom orientovanom grafe. Pretože u každého orientovaného eulerovského grafu D platí, pre každý vrchol v_i vonkajší stupeň sa rovná vnútornému stupňu, potom môžeme toto číslo označiť ako d_i.

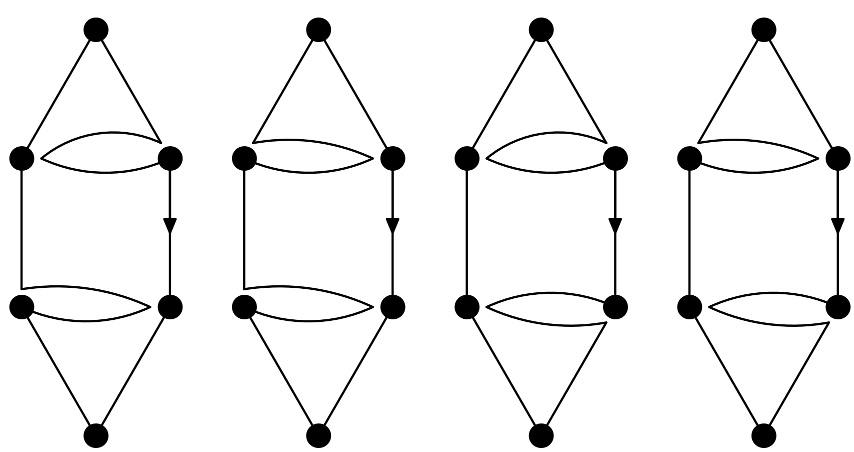
Veta 1.8.2 Počet $e(D)$ eulerovských ťahov v označenom eulerovskom orientovanom grafe D, u ktorého spoločná hodnota algebraických doplnkov matice $C = C_0 = C_1$ je práve c, je určený formulou:

$$e(D) = c \prod_i (d_i - 1)! \tag{1.66}$$

Dôkaz. Nech v_1 je ľubovoľný vrchol eulerovského orientovaného grafu D. Ukážeme, že každý eulerovský ťah E orientovaného grafu D určuje jedinú kostru T vchádzajúcu do vrchola v_1, a že každá kostra T určuje práve $\prod_i (d_i - 1)!$ eulerovských ťahov. A tak ako sme už ukázali, že počet kostier orientovaného grafu D vstupujúcich do každého vrchola je práve c, potom formula (1.66) bude dokázaná.

Aby sme zostrojili kostru vstupujúcu do vrchola v_1 a určenú eulerovským ťahom E v orgrafe D, nazveme poslednou orientovanou hranou ľub. vrchola $v_i \neq v_1$ takú hranu vystupujúcu z v_i, ktorá je posledná pri pohybe po ťahu E, ak počiatkom a koncom ťahu je vrchol v_1. Takýmto spôsobom len vrchol v_1 nemá poslednú orientovanú hranu. Kostra T sa potom definuje ako taký orientovaný faktor grafu D, u ktorého všetky orientované hrany sú poslednými hranami. V podgrafe T vonkajší polostupeň je u vrchola v_1 rovný 0 a vonkajšie polostupne všetkých iných vrcholov sú rovné 1, potom musí byť strom vsupujúcim do vrchola v_1.

Nech teraz T je niektorá kostra vstupujúca do vrchola v_1 (jedna z c takých kostier). Aby sme zostrojili všetky eulerovské ťahy E spojené s kostrou T, urobíme tak, ako v predchádzajúcom prípade, t.j. poslednými hranami ťahu E vzhľadom na vrchol v_1 budú orientované hrany kostry T. Pretože orientovaný graf D je eulerovský, potom vonkajší stupeň vrchola sa rovná vnútornému stupňu vrchola v_i. Pri zostrojovaní ťahu E z kostry T jedna z hrán vychádzajúca z ľubovoľného vrchola $v_i \neq v_1$ sa necháva, pretože neskôr sa použije ako posledná orientovaná hrana vystupujúca z vrchola v_1, rezervuje sa pre použitie prvej orientovanej hrany ťahu E. A tak pre každý vrchol v_i (vrátane vrchola v_1) existuje práve $(d_i - 1)!$ rôznych usporiadaných orientovaných hrán vystupujúcich z v_i po ich objavení v ťahu E. Pretože tieto výbery sú nezávislé, potom ak ich vynásobime faktoriálmi, dostávame počet eulerovských ťahov určených kostrou T. No existuje e takých kostier, čo aj dokazuje formulu (1.66). □



Obrázok 1.24: Štyri eulerovské ťahy grafu D na obrázku 1.22.

Dôsledok 1.8.1 Ak v eulerovskom grafe každé d_i je rovné buď 1 alebo 2, potom počet eulerovských orientovaných ťahov je rovný počtu c kostier vstupujúcich do ľubovoľného vrchola.

Tvrdenie bezprostredne vyplýva z toho, že každé $(d_i - 1)! = 1$. Ilustrujeme tento dôsledok na príklade orientovaného grafu D, ktorý je zobrazený na obrázku 1.22, a v ktorom každé d_i je rovné buď 1 alebo 2. Z vyčíslenia alg. doplnkov, ktoré predchádzalo obr. 1.23, vieme, že orientovaný graf D má práve štyri eulerovské orientované ťahy. Sú zobrazené na obr. 1.24 v súlade s kostrami vstupujúcimi do vrchola 1 uvedenými na obrázku 1.23.

1.9 Binárne stromy

Ako príklad použitia generujúcich funkcií určíme počet binárnych stromov s n vrcholmi.

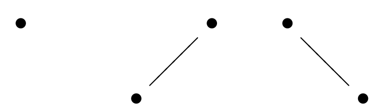
Pod binárnym stromom s n vrcholmi chápame prázdny strom $T = \emptyset$ ak $n = 0$ alebo $T =< L, r, P >$, kde r je vrchol, ktorý nazývame koreň stromu, L (ľavý podstrom) binárny strom s l vrcholmi, P (pravý podstrom) binárny strom s p vrcholmi a $l+p+1 = n$. Budeme hovoriť, že binárne stromy T_1 a T_2 sú izomorfné a písať $T_1 \cong T_2$, ak $T_1 = T_2 = \emptyset$ alebo $T_1 =< L_1, r_1, P_1 >$ a $T_2 =< L_2, r_2, P_2 >$, kde $L_1 \cong L_2$ a $P_1 \cong P_2$.

Označme c_k počet neizomorfných binárnych stromov s k vrcholmi. Z danej rekurzívnej definície vyplýva, že $c_0 = 1$ a ak $0 \leq s \leq k-1$, potom existuje práve $c_s c_{k-1-s}$ neizomorfných stromov tvaru $< L, r, P >$, L binárny strom s s vrcholmi. Číslo s môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu medzi 0 a $k-1$. Z toho vyplýva

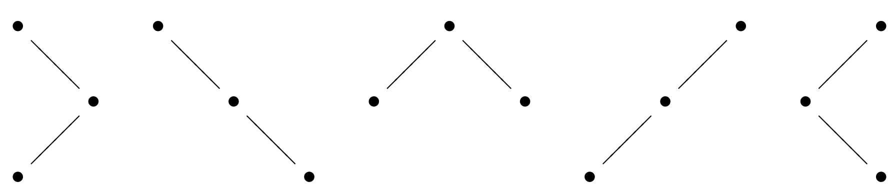
$$c_k = c_0 c_{k-1} + c_1 c_{k-2} + ... + c_{k-1} c_0 \tag{1.67}$$

Neizomorfné binárne stromy pre $k = 0, 1, 2, 3$ sú zobrazené na nasledujúcom obrázku:

$c_0 = c_1 = 1$ $\qquad$ $c_2 = 2$



$c_3 = 5$



Uvažujme generujúcu funkciu $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Rovnosť (1.67) nám pripomína formulu pre koeficienty Cauchyho súčinu $C(x)C(x) = C^2(x)$, presnejšie povedané platí nasledujúca rovnica

$$C(x) = xC^2(x) + 1 \tag{1.68}$$

alebo

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = 0$$

Ukážeme, že existuje analytická funkcia $C(x)$ v okolí bodu 0 vyhovujúca tomuto vzťahu, tejto rovnosti. V dôsledku vzájomne jednoznačného vzťahu medzi radmi a analytickými funkciami, koeficienty tohto riešenia určujú formálny rad vyhovujúci rovnosti (1.68). Ak uvažujeme (1.68) ako kvadratickú rovnicu s neznámou $C(x)$ (hodnota hľadanej analytickej funkcie v bode x), dostávame pre $x \neq 0$

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \tag{1.69}$$

Rozložme $\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$ do Maclaurinovho radu.

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + ...$$

$$f(x) = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)...(\frac{1}{2}-k+1)(1-4x)^{\frac{1}{2}-k}(-4)^k =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1-2)}{2}\frac{(1-4)}{2}\frac{(1-6)}{2}...\frac{(1-2k+2)}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}-k}(-4)^k =$$

$$= \frac{1(-1)(-3)...(1-2(k+1))(1-4x)^{\frac{1}{2}-k}(-4)^k}{2^k} =$$

$$= 1(-1)(-3)...(1-2(k+1))(1-4x)^{\frac{1}{2}-k}(-2)^k =$$

$$= 2^k(-1)^{k+k-1}(1)(3)(5)...(2k-3)(1-4x)^{\frac{1}{2}-k} =$$

$$= \frac{2^k(-1)1.2.3.4.5.6....(2k-3)(2k-2)(1-4x)^{\frac{1}{2}-k}}{2.4.6...(2k-2)} =$$

$$= \frac{(-1)2^k(2k-2)!(1-4x)^{\frac{1}{2}-k}}{2^{k-1}(k-1)!} = \frac{(-1)2(2k-2)!(1-4x)^{\frac{1}{2}-k}}{(k-1)!}$$

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k$$

Odtiaľ vidno, že na to aby sme dosiahli riešenie s hľadanými koeficientami treba vybrať znamienko mínus v (1.69). Takýmto spôsobom dostávame

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}x^k$$

odtiaľ dostávame

$$C(k) = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

— Catalanové čisla.

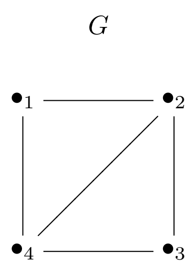
Kapitola 2

Enumerácia neoznačených objektov

2.1 Grupy a grafy

Pri určovaní počtu neoznačených grafov úlohu formulujeme tak, aby sme mohli výsledok získať tým, že nájdeme počet orbít niektorej vhodnej grupy permutácií. Z Burnsidovej lemy určíme počet orbít vyčíslením počtu identických prvkov vzhľadom na permutácie z uvažovanej grupy.

Uvažujme množinu $X = \{1, 2, ..., n\}$ a nech A je niektorá množina permutácii množiny X uzavretá vzhľadom na operáciu skladania permutácii. Potom A je grupou permutácii na množine objektov X. Rád grupy A označujeme $|A|$ a je to počet permutácii A; stupeň grupy A je počet prvkov množiny X, teda stupeň je rovný n.



$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1)(2)(3)(4) \\ \alpha_2 &= (1)(3)(24) \\ \alpha_3 &= (13)(2)(4) \\ \alpha_4 &= (13)(24) \end{aligned}$$

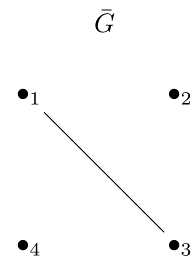
Obrázok 2.1: Graf G a jeho grupa.

Poznámka 2.1.1 Graf G určuje "obraz" svojej grupy automorfizmov. Takýmto spôsobom teoreticko-grupové pojmy, ktoré budeme potrebovať, objasníme tak, že ich budeme skúmať spolu s grafmi, využijeme pritom názornosť a podnety, ktoré umožňuje teória grafov.

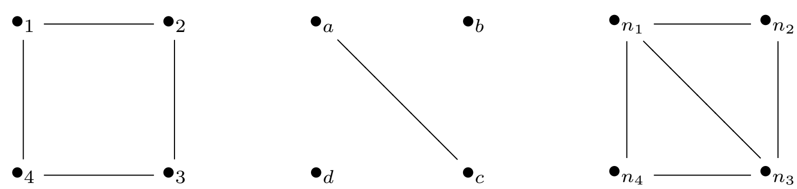
$\Gamma(G)$ - množina všetkých permutácii na množine $V(G)$ zachovávajúcich susednosť sa nazýva grupou grafu G a jej permutácie nazývame automorfizmami. Teda grupa grafu je grupou permutácii, ktorých objektami su vrcholy grafu.

Poznámka 2.1.2 Ľahko sa možno presvedčiť, že pre ľubovoľný graf G platí $\Gamma(\bar{G}) = \Gamma(G)$.

Na vyriešenie otázky : kedy sú rovnaké dve grupy permutácii, potrebujeme jemnejšie kritérium, ako je grupový izomorfizmus. Uvažujme tri označené grafy, ktoré sú znázornené na obr. 2.3.



Obrázok 2.2: Komplement grafu zobrazeného na obr.1.



Obrázok 2.3: Tri grafy s rovnakými grupami.

Tieto grafy majú rovnaké grupy, rozdiel medzi nimi spočíva len v "doplnkovosti" a označení. Je preto vhodné stotožniť grupy permutácii, u ktorých sa permutácie lišia len "menom" permutovaných objektov. Vychádzajúc z toho uvedieme nasledujúce definície.

Definícia 2.1.1 Nech A a B sú dve grupy permutácii s množinami objektov X resp. Y. Hovoríme, že sú izomorfné, označujeme $A \cong B$, ak existuje bijekcia h z A do B taká, že pre všetky permutácie α_1 a α_2 z grupy A platí rovnosť

$$h(\alpha_1\alpha_2) = h(\alpha_1)h(\alpha_2).$$

Ak okrem toho existuje bijekcia ϕ z X do Y taká, že pre každú permutáciu $\alpha \in A$ a pre každý prvok $x \in X$ platí rovnosť

$$\phi(\alpha x) = h(\alpha)\phi(x)$$

potom grupy A a B sú identické a píšeme $A = B$.

Poznámka 2.1.3 Zobrazenie ϕ proste zamieňa označenia (názvy) objektov, na ktorých pôsobí grupa A, označeniami zodpovedajúcimi grupe B. Grupy všetkých troch grafov uvedených na obr. 2.3 sú identické.

2.2 Cyklový index grupy permutácii

A - grupa permutácii na množine objektov $X = \{1, 2, ..., n\}$. Je známe, že každú permutáciu $\alpha \in A$ môžeme jediným spôsobom vyjadriť v tvare súčinu po dvoch disjunktných cyklov. Pre každé $k = 1, 2, ..., n$ znakom $j_k(\alpha)$ budeme označovať počet cyklov dĺžky k v rozklade permutácie α na súčin po dvoch disjunktných cyklov. Potom cyklový index grupy A, budeme ho označovať ako $Z(A)$, predstavuje mnohočlen premenných $s_1, s_2, ..., s_n$ určený formulou

$$Z(A) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \prod_{k=1}^{n} s_k^{j_k(\alpha)}.$$

Poznámka 2.2.1 Ak budeme potrebovať zdôrazniť premenné, tak namiesto $Z(A)$ budeme písať $Z(A, s_1, ..., s_n)$.

Príklad 2.2.1 Uvažujme symetrickú grupu S_n definovanú na množine o n prvkoch. Potom

$$Z(S_3) = \frac{1}{3!}(s_1^3 + 3s_1s_2 + 2s_3).$$

Poznámka 2.2.2 Najviac sa používajú explicitné formuly pre cyklové indexy piatich známych grúp permutácii: symetrickej, alternujúcej, cyklickej, diedrálnej a identickej.

Je známe, že každú permutáciu α na n prvkoch možno reprezentovať určitým rozkladom čísla n prostredníctvom vektora $(j) = (j_1, j_2, ..., j_n)$, kde j_k je počet častí rozkladu rovných k a teda

$$n = \sum_{k=1}^{n} k j_k.$$

Nech $h(j)$ je počet permutácii v grupe S_n, rozklad ktorých je určený vektorom (j). Pretože pre každé k platí $j_k = j_k(\alpha)$, ľahko možno nahliadnuť, že

$$h(j) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k^{j_k} j_k!}. \tag{2.1}$$

Takýmto spôsobom pre cyklový index $Z(S_n)$ dostávame:

Veta 2.2.1 (Polya, Redfield) Cyklový index symetrickej grupy je určený formulou

$$Z(S_n) = \frac{1}{n!} \sum_{(j)} h(j) \prod_{k=1}^{n} s_k^{j_k},$$

kde súčet berieme vzhľadom na všetky rozklady (j) čísla n a $h(j)$ je určená výrazom (2.1).

2.3 Burnsidova lema

Nech A je grupa permutácií na množine objektov $X = \{1, 2, ..., n\}$. Potom prvky x a y z X budeme nazývať A-ekvivalentné, ak existuje permutácia $\alpha \in A$ taká, že $\alpha x = y$.

Ľahko možno ukázať, že horeuvedená relácia je ekvivalencia na množine X. Triedy ekvivalencie nazývame orbitami, alebo systémy tranzitívnosti grupy A.

Pre každé $x \in X$ položme

$$A(x) = \{\alpha \in A |\ \alpha x = x\}.$$

Uvedená množina $A(x)$ sa nazýva stabilizátorom prvku x, alebo grupou izotrópie prvku x. Poznamenávame, že ak prvky x a y patria do jednej orbity, potom množiny $A(x)$ a $A(y)$ sú konjugované podgrupy grupy A a teda $|A(x)| = |A(y)|$. Uvedená rovnosť vyplýva z nasledujúcej úvahy: $\gamma x = y \to \gamma^{-1} y = x$, $A(x) = \{\alpha_i |\ \alpha_i x = x\}$, $A(y) = \{\beta_j |\ \beta_j y = y\}$, $\alpha_i x = x$, $\gamma \alpha_i x = \gamma x = y$, $\gamma \alpha_i \gamma^{-1} y = y \to \gamma \alpha_i \gamma^{-1} = \beta_i$. Ľahko vidno, že ľubovoľné β_i sa dá vyjadriť v uvedenom tvare.

Teraz ukážeme, že pre ľubovoľný prvok y z orbity $Y = \Theta(y)$ grupy A platí vzťah

$$|A| = |A(y)||Y| \tag{2.2}$$

t.j. počet elementov v orbite, ktorá obsahuje element y, je rovný indexu stabilizátora elementu y v grupe A. Aby sme sa o tom presvedčili, najprv rozložíme grupu podľa podgrupy $A(y)$ a grupu A zapíšeme ako zjednotenie pravých tried rozkladu podľa uvažovanej podgrupy $A(y)$:

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} \alpha_i A(y).$$

Teraz nám stačí ukázať vzájomne jednoznačný vzťah medzi triedami rozkladu a prvkami orbity Y. Pre každé $i = 1, 2, ..., m$ priradíme triede rozkladu $\alpha_i A(y)$ prvok $\alpha_i y \in Y$. Ak $i \neq j$, potom $\alpha_i y \neq \alpha_j y$, pretože inak by permutácia $\alpha_j^{-1}\alpha_i$ patrila podgrupe $A(y)$, a teda permutácia α_i by bola prvkom $\alpha_j A(y)$, čo je v spore so vzťahom, že $\alpha_i A(y) \cap \alpha_j A(y) = \emptyset$. To znamená, že uvedený vzťah je jednoznačný. Pre každý objekt $y' \in Y$ pri niektorej permutácií $\alpha \in A$ je splnená rovnosť $\alpha y = y'$. Z rozkladu grupy A na triedy rozkladu vyplýva, že $\alpha_i \gamma = \alpha$, ak $\gamma \in A(y)$. Z toho vyplýva, že $y' = \alpha_i \gamma y = \alpha_i y$ a takýmto spôsbom každý prvok orbity Y zodpovedá niektorej triede rozkladu. To znamená, že m je počet elementov v orbite Y a tým je formula (2.2) dokázaná.

Teraz už máme všetko pripravené na dôkaz Burnsideho lemy, ktorá udáva formulu na vyjadrenie počtu orbít grupy A pomocou aritmetického priemeru počtu identických prvkov všetkých permutácii grupy A.

Lema 2.3.1 (Burnsidova lema) Nech $N(A)$ je počet orbít grupy A, potom $N(A)$ je určený formulou

$$N(A) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha).$$

Dôkaz. Nech $X_1, X_2, ..., X_m$ sú orbity grupy A, nech pre každé $i = 1, 2, ..., m$ x_i je prvok i-tej orbity X_i. Potom z formuly (2.2) dostávame

$$N(A)|A| = \sum_{i=1}^{m} |A(x_i)||X_i|. \tag{2.3}$$

Ako sme už uázali predtým, že ak x a x_i patria do jednej a tej istej orbity, potom $|A(x)| = |A(x_i)|$. Z toho vyplýva, že vzťah (2.3) možno inak zapísať takto:

$$N(A)|A| = \sum_{x \in X} |A(x)|$$

alebo v iných označeniach :

$$N(A)|A| = \sum_{x \in X} \sum_{\substack{\alpha \in A \\ x = \alpha x}} 1.$$

No keď si uvedomíme, že $\sum_{x\in X} \sum_{x=\alpha x} 1$ je rovné práve $\sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha)$, tak na to, aby sme dokončili dôkaz, nám stačí, aby sme obidve časti delili $|A|$. □

Príklad 2.3.1 Uvažujme graf G na obr. 2.4.

Rád grupy $\Gamma(G)$ je rovný 4 a každá jej permutácia zachováva identitu troch vrcholov 3, 5 a 7. Označme permutácie nasledujúcim spôsobom:

$$\alpha_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) \quad \alpha_2 = (12)(3)(4)(5)(6)(7)$$
$$\alpha_3 = (46)(1)(2)(3)(5)(7) \quad \alpha_4 = (12)(46)(3)(5)(7)$$

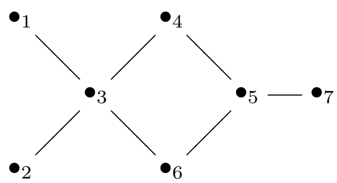
Teda $j_1(\alpha_1) = 7$, $j_1(\alpha_2) = j_1(\alpha_3) = 5$ a $j_1(\alpha_4) = 3$. Takýmto spôsobom dostávame

$$N(\Gamma(G)) = \frac{1}{4}(7 + 5 + 5 + 3) = 5.$$

Je zrejmé, že orbitami tejto grupy sú množiny $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{1, 2\}$, $\{4, 6\}$. Poznamenávame, že počet orbít je totožný s počtom spôsobov, ktorými môžeme dostať z grafu G rôzne neoznačené zakorenené grafy.

Aby sme také všetky grafy dostali, treba ako koreň vybrať po jednom vrchole z každej orbity.

$G:$



Obrázok 2.4: Graf s troma identickými prvkami.

Niekedy je treba ohraničiť pôsobenie grupy A na niektorú podmnožinu Y množiny X, kde Y je zjednotenie nejakých orbít grupy A. Preto označíme ako $A|Y$ množinu permutácií, pôsobiacich na Y, ktoré dostávame pomocou ohraničenia na podmnožinu Y, zodpovedajúcich permutácií grupy A. Pre každú permutáciu $\alpha \in A$ počet prvkov v Y, identických vzhľadom na permutáciu α označíme ako $j_1(\alpha|Y)$. Potom môžeme sformulovať dôsledok Burnsidovej formuly, ako jej ohraničenú formu, nasledovne.

$$N(A|Y) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha|Y).$$

Ďalej uvedieme zovšeobecnenie Burnsidovej formuly, ktoré nazývame jej zváženou formou.

Nech R je komutatívny okruh, obsahujúci množinu všetkých racionálnych čísel a w niektorá funkcia, ktorú nazývame váhovou funkciou, zobrazujúcou množinu objektov X grupy A do okruhu R. V praktických aplikáciach je váhová funkcia konštantnou na každej orbite grupy A. Teda v tomto prípade môžeme určiť váhu ľubovoľnej orbity X_i ako váhu ľubovoľného jej prvku. Pre každú orbitu X_i označíme jej váhu ako $w(X_i)$ a určíme ju vzťahom $w(X_i) = w(x)$ pre každý prvok $x \in X_i$.

Takýmto spôsobom môžeme sformulovať zváženú formu Burnsidovej formuly: Súčet váh orbít grupy A je určený nasledujúcou formulou;

$$\sum_{i=1}^{m} w(X_i) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \sum_{x=\alpha x} w(x).$$

Dôkaz je analogický, ako dôkaz Burnsidovej lemy. Na ilustráciu zváženej formy uvažujeme graf na obrázku 2.4. Váhu $w(k)$ každého vrcholu k grafu G definujeme ako cyklový index stabilizátora vrchola k v grupe $\Gamma(G)$.

$$\begin{aligned} w(1) &= \frac{1}{2}(s_1^7 + s_1^5 s_2) \\ w(3) &= \frac{1}{4}(s_1^7 + 2s_1^5 s_2 + s_2^2 s_1^3) \end{aligned}$$

Poznamenávame, že $w(1) = w(2) = w(4) = w(6)$ a $w(3) = w(5) = w(7)$. V našom prípade súčet váh orbít je rovný!

$$w(1) + w(3) + w(4) + w(5) + w(7) = 2w(1) + 3w(3).$$

Ak uvažujeme pravú stranu zváženej Burnsidovej formuly pre náš prípad, tak dostávame:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i=1}^{4}\sum_{x=\alpha_i x} w(x) &= \tfrac{1}{4}\left\{\textstyle\sum_{x=\alpha_1 x} w(x) + \sum_{x=\alpha_2 x} w(x) + \sum_{x=\alpha_3 x} w(x) + \sum_{x=\alpha_4 x} w(x)\right\} = \\ &= \tfrac{1}{4}\{w(1) + w(2) + w(3) + w(4) + w(5) + w(6) + w(7) + w(3) + w(4) + \\ &+ w(5) + w(6) + w(7) + w(1) + w(2) + w(3) + w(5) + w(7) + w(3) + \\ &+ w(5) + w(7)\} = \tfrac{1}{4}\left(8w(1) + 12w(3)\right) = 2w(1) + 3w(3). \end{aligned}$$

Poznamenávame, že analogicky šúčet cyklových indexov všetkých koreňových grafov, ktoré dostaneme z niektorého grafu G, môže byť vyjadrený pomocou váh identických vrcholov grupy $\Gamma(G)$.

2.4 Polyova veta

Pretože vo väčšine prípadov pri aplikácii enumeračnej Polyovej vety potrebujeme len variant s jednou premennou a pretože v tomto prípade sa Polyova veta chápe omnoho ľahšie, nebudeme sa detailne zaoberať jej zovšeobecnením na n-premenných, na istom mieste uvedieme pre tento prípad jej formuláciu.

Zavedieme pojem mocninovej grupy, ktorú budeme v ďalšom používať.

Nech A je grupa permutácií s množinou objektov $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ a nech B je konečná grupa permutácií so spočítateľnou množinou objektov Y, ktorá obsahuje aspoň dva prvky. Potom mocninová grupa označená ako B^A, má množinu objektov množinu Y^X všetkých zobrazení z množiny X do množiny Y. Permutáciami grupy B^A sú všetky usporiadané dvojice permutácií α z A a β z B zapisovaných v tvare $(\alpha; \beta)$. Obraz ľubovoľnej funkcie f z Y^X pri aplikácii permutácie $(\alpha; \beta)$ je určený formulou

$$((\alpha; \beta)f)(x) = \beta f(\alpha x)$$

pre všetky $x \in X$.

Na to, aby sme sformulovali klasickú enumeračnú Polyovu formulu, položíme $B = E$ – identická grupa na Y. Uvažujme teraz mocninovú grupu E^A pôsobiacu na množine Y^X. Nech $w : Y \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ je zobrazenie, funkcia, ktorej obor hodnôt je množina prirodzených čísel a pre ktorú $|w^{-1}(k)|$ je konečná pre každé k, kde $w^{-1}(k)$ je množina prvkov z Y, ktoré sa zobrazia pri w na prirodzené číslo k. Špeciálne pre každé $k = 0, 1, 2, \ldots$ nech

$$c_k = |w^{-1}(k)|$$

bude označovať počet „figúr" váhy k.

Potom o elemente y z Y, pre ktorý $w(y) = k$ hovoríme, že má váhu k, a funkciu w nazývame váhovou funkciou. Ďalej nech

$$c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

vzhľadom na premennú x, ktorý vyčísluje elementy množiny Y v súlade s ich váhami, nazývame radom vyčíslujúcim figúry.

Váha funkcie f z Y^X sa definuje formulou

$$w(f) = \sum_{x \in X} w(f(x)),$$

nie je ťažké ukázať, že funkcie, patriace do jednej a tej istej orbity mocninovej grupy E^A majú rovnaké váhy. (Uvedené tvrdenie vyplýva z nasledujúcich vzťahov a rovností: $w(f) = \sum_{x \in X} w(f(x))$; $w(g) = \sum_{x \in X} w(g(x))$; $g(x) = \varepsilon f(\alpha x) = f(\alpha x) \to f(X) = g(X)$). Z toho vyplýva, že váhou $w(F)$ orbity F grupy E^A je váha ľubovoľnej funkcie f z orbity F. Pretože $|w^{-1}(k)|$ je prirodzené číslo pre každé $k = 0, 1, 2, \ldots$, potom existuje len konečný počet orbít každej váhy. Preto označíme C_k počet orbít váhy k. Potom rad

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

vzhľadom na premennú x nazývame radom vyčísľujúcim funkcie. Teraz môžeme sformulovať základnú vetu, ktorá vyjadruje rad $C(x)$ v termínoch cyklového indexu $Z(A)$ a radu $c(x)$. V uvedenej formule $Z(A, c(x))$ je skráteným zápisom pre formulu $Z(A, c(x), c(x^2), c(x^3), \ldots)$.

Veta 2.4.1 (Enumeračná Polyova veta) Rad $C(x)$ vyčíslujúci funkcie dostaneme pomocou zámeny v cyklovom indexe $Z(A)$ namiesto každej premennej s_k radom $c(x^k)$, vyčíslujúceho figúry. Symbolicky:

$$C(x) = Z(A, c(x))$$

alebo podrobnejší tvar

$$C(x) = \frac{1}{|A|^{-1}} \sum_{\alpha \in A} \prod_{k=1}^{n} [c(x^k)]^{j_k(\alpha)}. \tag{2.4}$$

Poznamenávame, že tento výsledok sa používa tak častokrát, že namiesto „Polyova enumeračná veta" pri vyčíslení grafov sa v stručnosti píše spravidla „Polyova veta".

Dôkaz. Nech ε je identická permutácia na Y. Potom pre každú permutáciu $\alpha \in A$ a ľubovoľné $k = 0, 1, 2, \ldots$ označíme $\varphi(\alpha, k)$ počet funkcií váhy k, pevných vzhľadom na permutáciu $(\alpha; \varepsilon)$. Ak ohraničíme pre každé k pôsobnosť mocninovej grupy E^A na množinu funkcií váhy k a aplikujeme ohraničenú formu Burnsidovej lemy, dostávame

$$C_k = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha, k).$$

Z toho vyplýva, že

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha, k) x^k.$$

Ak zameníme poradie sumácie, dostávame

$$C(x) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\alpha, k) x^k. \tag{2.5}$$

Rad $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\alpha, k) x^k$ vyčísluje všetky funkcie, pevné vzhľadom na permutáciu $(\alpha; \varepsilon)$. Potom $((\alpha; \varepsilon) f)(x) = \varepsilon f(\alpha x)$. Takým spôsobom pre všetky x musí platiť rovnosť $f(\alpha x) = f(x)$, t.j. funkcia musí byť konštantou na disjunktných cykloch permutácie α. Obrátene, všetky funkcie konštantné na cykloch permutácie α sú pevné vzhľadom na permutáciu $(\alpha; \varepsilon)$.

Nech z_r je cyklus dĺžky r v permutácii α. Ak funkcia zobrazuje elementy cyklu z_r na jeden z c_k elementov množiny Y, ktorý má váhu k, potom cyklus z_r dáva vklad do váhy funkcie f hodnotu $r \cdot k$. Potom ľahko vidieť, že pre každé k koeficient pri x^{rk} v rade

$$c(x^r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{rk}$$

je rovný počtu spôsobov, ktorými môžeme určiť funkciu f na prvkoch cyklu z_r tak, aby bola pevná vzhľadom na permutáciu $(\alpha; \varepsilon)$ a aby vklad do váhy $w(f)$ bol $r \cdot k$. Odtiaľ vyplýva, že rad $[c(x^r)]^{j_r(\alpha)}$ vyčísluje v súlade s ich váhami rôzne spôsoby určenia funkcií, ktoré sú konštantné na všetkých cykloch dĺžky r permutácie α.

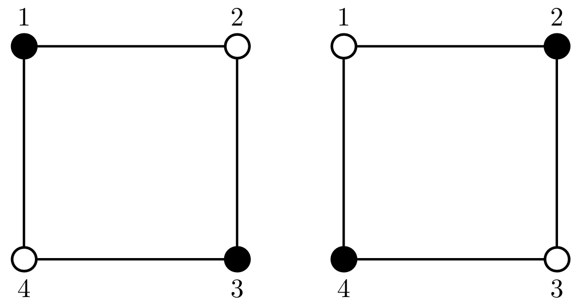
Uvažujme všetky cykly permutácie α, môžeme vyjadriť rad pre funkcie, ktoré sú konštantné na cykloch v tvare súčinu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\alpha, k) x^k = \prod_{k=1}^{n} [c(x^k)]^{j_k(\alpha)}. \tag{2.6}$$

Teraz (2.4) dostávame z (2.5) a (2.6) a definície $Z(A)$. □

Príklad 2.4.1 Na ilustráciu Polyovej vety uvažujeme „problém náhrdelníka". Na obrázku 2.5 sú dva náhrdelníky, každý so štyrmi kameňmi, pričom každý z kameňov je označený číslom z množiny $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Dva kamene náhrdelníka sú čierne a dva biele.

Je zrejmé, že počet označených náhrdelníkov so štyrmi kameňmi, obsahujúci len kamene bielej alebo čiernej farby, je rovný 48. Grupa automorfizmov pre kružnicu dĺžky 4 má 8 prvkov, teda



Obrázok 2.5: Náhrdelníky so štyrmi kameňmi.

kružnica, podľa známej formuly má 3 rôzne označenia. Počet rôznych zafarbení označenej kružnice dĺžky 4 dvomi farbami je rovný 2^4. Teda celkový počet označených náhrdelníkov so 4 kameňmi, ktoré môžu byť biele alebo čierne, je rovný $3 \cdot 2^4 = 48$.

Na to aby sme dostali počet neoznačených náhrdelníkov, je treba stotožniť také náhrdelníky, ako sú na obrázku 2.5, t.j. keď jeden náhrdelník z druhého dostaneme otočením alebo preklopením. Ak položíme $Y = \{a, b\}$, potom každá funkcia $f : X \to Y$ zodpovedá niektorému označenému náhrdelníku, v ktorom kamienok s číslom k má „farbu" $f(k)$. Takýmto spôsobom náhrdelník reprezentovaný funkciou f má $|f^{-1}(a)|$ kameňov jednej farby a $f^{-1}(b)$ kameňov druhej farby. Nech teraz identická grupa E_2 pôsobí na množinu Y. Dva náhrdelníky budú rovnaké po vynechaní značiek v tom prípade, ak zodpovedajúce funkcie patria k jednej orbite mocninovej grupy $E_2^{D_4}$. D_4 – označuje diedrálnu grupu, v našom prípade ju tvoria permutácie: $(1)(2)(3)(4); (1)(3)(24); (13)(2)(4); (12)(34); (13)(24); (14)(23); (1234); (1432)$. Ak položíme $w(a) = 0$ a $w(b) = 1$, potom $1 + x$ je vyčíslujúcim radom pre Y a funkcia váhy k bude predstavovať náhrdelník s $4-k$ bielymi a k čiernymi kameňmi. Z toho vyplýva, že enumeračný rad pre funkcie $C(x)$ v tomto prípade vyčísluje neoznačené náhrdelníky a koeficient pri x^k je rovný počtu takých náhrdelníkov s k čiernymi kameňmi. Potom z formuly uvedenej v Polyovej vete dostávame:

$$Z(D_4) = \frac{1}{8}\left(s_1^4 + 2s_1^2 s_2 + 3s_2^2 + 2s_4\right)$$

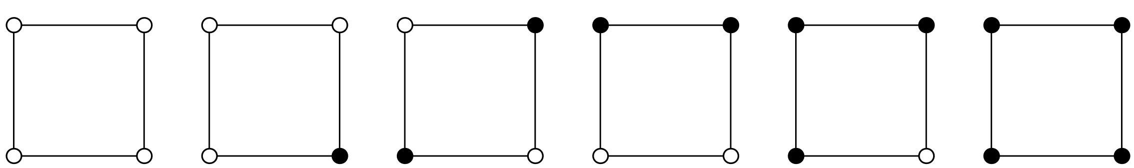
a teda

$$C(x) = Z(D_4; 1+x) = \frac{1}{8}\left((1+x)^4 + 2(1+x)^2(1+x^2) + 3(1+x^2)^2 + 2(1+x^4)\right),$$

ak splníme technické detaily, súvisiace so zámenou vyčíslujúceho radu pre figúry $1+x$ do cyklového indexu $Z(D_4)$, tak dostávame

$$C(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3 + x^4.$$

Šesť neoznačených náhrdelníkov so štyrmi kameňmi dvoch farieb sú uvedené na obrázku 2.6 Celkový počet neoznačených náhrdelníkov je rovný $C(1)$, a teda to znamená, že celkový počet

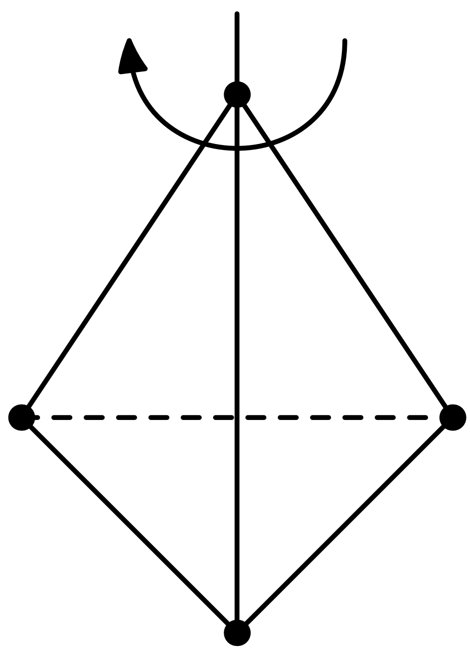


Obrázok 2.6: Všetky náhrdelníky neoznačené o dvoch farbách.

môžeme dostať pomocou vyčíslenia hodnoty radu $1 + x$ pre figúry, pri $x = 1$ a zámenou každej premennej s_k v cyklovom indexe $Z(D_4)$ prirodzeným číslom 2.

Vo všeobecnosti, keď rad $c(x)$ vyčíslujúci figúry je mnohočlen, potom rad $C(x)$ vyčíslujúci funkcie je taktiež mnohočlen. V tomto prípade počet orbít funkcií (neberieme do úvahy ich váhy) je rovný $C(1)$, dostávame tak, že namiesto každej premennej do zodpovedajúceho cyklového indexu dosadíme $c(1)$.

Príklad 2.4.2 Máme daný štvorsten, zobrazený na obrázku 2.7 (so stenami označenými číslami 1,2,3,4) a pýtame sa koľkými spôsobmi sa dajú zafarbiť jeho steny bielou a čiernou farbou tak, že každá stena je zafarbená celá buď na čierno alebo na bielo. Problém by bol veľmi jednoduchý, ak by boli steny geometricky rozlíšiteľné. Spôsoby zafarbenia by potom odpovedali variáciám štvrtej triedy (steny $\{1,2,3,4\}$) z dvoch prvkov ($\{$biela farba, čierna farba$\}$) s opakovaním, ich celkový počet je rovný 2^4. Avšak v danom štvorstene sú steny 1,2 a 3 zhodné, teda štvorsten je symetrický pri otočení 120° okolo vertikálnej osi, čo má za následok, že odlišným zafarbením získame objekty, ktoré sú nerozlíšiteľné. Poznamenávame, že A – grupa symetrií daného útvaru, v našom prípade



Obrázok 2.7: Štvorsten.

štvorstenu pozostáva z troch permutácií

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (1)(2)(3)(4)\\ \alpha_2 &= (123)(4)\\ \alpha_3 &= (132)(4).\end{aligned}$$

Potom $Z(A; s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{3}[s_1^4 + 2s_1s_3]$, rad $c(x) = 1 + x$ vyčísluje figúry. Potom

$$C(x) = \frac{1}{3}\left[(1+x)^4 + 2(1+x)(1+x^3)\right]$$

je vyčíslujúci rad pre funkcie. Počet orbít je rovný

$$C(1) = \frac{1}{3}[2^4 + 2\cdot 2\cdot 2] = 8 = Z(A; 2).$$

Dôsledok 2.4.1 Počet orbít, určených mocninovou grupou E_m^A, dostávame tak, že každú premennú v $Z(A)$ zameníme m, teda

$$N(E_m^A) = Z(A, m)$$

Pre prípad m premenných uvedieme len formuláciu Polyovej vety. Dôkaz vety je analogický ako v prípade jednej premennej. Nech $\mathbb{N}$ je množina prirodzených čísel a $\mathbb{N}^m = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ je karteziánsky súčin m kópií množiny $\mathbb{N}$. Tak ako v prípade jednej premennej, množina objektov mocninovej grupy E^A je množina Y^X a váhová funkcia $w : Y \to \mathbb{N}^m$ má takú vlastnosť, že pre každé $z \in \mathbb{N}^m$ platí, že $|w^{-1}(z)|$ je konečné prirodzené číslo. Aditívnosť podľa komponentov v N^m, váha funkcie z Y^X a orbity indukované grupou E^A sa definujú tak, ako v prípade jednej premennej.

Koeficient pri $x_1^{r_1}, x_2^{r_2}, ..., x_m^{r_m}$ v rade $c(x_1, ..., x_m)$, ktorý vyčísluje figúry, je podľa definície rovný $w^-(r_1, ..., r_m)$. Koeficient pri $x_1^{t_1}, ..., x_m^{t_m}$ v rade $C(x_1, ..., x_m)$, ktorý vyčísluje funkcie, je rovný počtu orbít váhy $(t_1, ..., t_m)$. Ak $Z(A, c(x_1, ..., x_m))$ označuje rad, ktorý dostaneme pomocou zámeny každej premennej s_k v $Z(A)$ radom $c(x_1^k, ..., x_m^k)$, potom výsledok, ktorý udáva zovšeobecnená Polyova veta pre m premenných, môžeme sformulovať nasledujúcim spôsobom.

Veta 2.4.2 Nech $c(x_1, ..., x_m)$ je vyčíslujúci rad pre figúry množiny Y. Potom pre orbity funkcií z Y^X, ktoré sú určené množinovou grupou E^A, výčíslujeme v súlade so svojími váhami radom

$$C(x_1, ..., x_m) = Z(A, c(x_1, ..., x_m)).$$

Príklad 2.4.3 Na ilustráciu uvedenej vety sa vrátime k problému náhrdelníka. Našou úlohou bude nájsť vyčíslujúci rad pre náhrdelník so štyrmi kameňmi a tromi prípustnými farbami. Nech $Y = \{a, b, c\}$ a uvažujme ľubovoľnú funkciu $f : X \to Y$ ako vyjadrenie náhrdelníka s $|f^-(a)|$ červenými, $|f^-(b)|$ bielymi a $|f^-(c)|$ modrými kameňmi. Ak položíme $w(a) = (0, 0)$, $w(b) = (1, 0)$ a $w(c) = (0, 1)$, potom

$$w(f) = \sum_{x \in X} w(f(x))$$

pričom $w(f)$ je usporiadaná dvojica, ktorej prvá súradnica je rovná počtu bielych kameňov a druhá súradnica počtu modrých kameňov. Počet červených kameňov je prirodzene rovný rozdielu medzi $|X|$ a počtom bielych a modrých kameňov. Ten, v súlade s definíciou vyčíslujúceho radu pre figúry, je $c(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_2$. Z toho vyplýva, že na základe vety má vyčíslujúci rad pre náhrdelníky tvar:

$$C(x_1, x_2) = Z(D_4, 1 + x_1 + x_2)$$

pričom $Z(D_4) = \frac{1}{8}(s_1^4 + 2s_1^2 s_2 + 3s_2^2 + 2s_4)$, tak po uskutočnení predpísaných operácií pri substitúcií vyčíslujúceho radu pre figúry do cyklového indexu $Z(D_4)$ napokon dostávame

$$C(x_1, x_2) = 1 + x_1 + 2x_1^2 + x_1^3 + x_1^4 + x_2 + 2x_2^2 + x_2^3 + x_2^4 +$$

$$+ 2x_1x_2 + 2x_1^2x_2 + x_1^3x_2 + 2x_1x_2^2 + x_1x_2^3 + 2x_1^2x_2^2.$$

Poznamenávame, že súčet koeficientov mnohočlena $C(x_1, x_2)$ môžeme ľahko vyčísliť tak, že nájdeme hodnotu $Z(D_4, 3) = 21$, čo je to isté, ako predchádzajúci výraz pre $C(1, 1)$.

2.5 Rad $1 + x$ - špecálny rad pre figúry

Existuje pomerne prirodzený dôsledok Polyovej vety, ktorý zdôrazňuje dôležitosť koeficientov mnohočlena, ktorý dostaneme ako výsledok zámeny radu $1 + x$ do cyklového indexu ľubovoľnej grupy permutácie A. Toto tvrdenie sa ľahko dokazuje, je však veľmi dôležité, pretože každá vyčíslujúca formula, ktorú dostaneme z Polyovej vety použitím radu $1 + x$ ako radu pre figúry, predstavuje špeciálny prípad tohto dôsledku. Spomedzi takých výsledkov to budú formuly pre výpočet počtu rôznych tried grafov.

Určíme význam tohto výsledku pre päť špeciálnych grúp, ktorých cyklové indexy sú nám už dobré známe. Podobne ako pre prvky definujeme A-ekvivalentnosť dvoch r-podmnožín množiny X.

Množiny S, S' r-podmnožiny množiny X, nzývame A-ekvivalentné, ak pre niektorú permutáciu $\alpha \in A$ platí $\alpha S = S'$.

Dôsledok 2.5.1 (Polyovej vety) Koeficient pri x^r v $Z(A, 1{+}x)$ je rovný počtu A-ekvivalentných tried r-podmnožín množiny X.

Dôkaz. V rade $1+x$, ktorý vyčísluje figúry, sčítanec $1 = x^0$ môžeme interpretovať ako neprítomnosť objektu z X a sčítanec $x = x^1$ ako prítomnosť tohto objektu z X. Preto x^r označuje, že r-rôznych objektov, ktoré tvoria r-množinu, sú v množine X. Tvrdenie teraz bezprostredne vyplýva z Polyovej vety a koeficient pri x^r označuje počet orbít váhy r. □

Poznamenávame, že ak použijeme uvedený dôsledok, tak vidíme, že grupa permutácií A je tranzitívna práve vtedy, keď koeficient pri x v $Z(A, 1+x)$ je rovný 1. Okrem toho, koeficienty tohto mnohočlena, ktoré stoja rovnako od koncov, sú si vždy rovné, pretože počet tried A-ekvivalentných r-podmnožín je totožný s počtom A-ekvivalentných $(n-r)$-podmnožín.

V ďaľšej časti uvedieme niekoľko užitočných poznámok k piatim najznámejším a často používaným permutačným grupám a potom uskutočníme substitúciu radu $1{+}x$ do príslušných cyklových indexov.

Symetrická grupa S_n na množine $\{1, 2, ..., n\}$ sa skladá zo všetkých $n!$ permutácií.

Alternujúcu grupu A_n tvoria všetky párne permutácie na množine $\{1, 2, ..., n\}$. Permutácia je párna (nepárna), ak jej rozklad na súčin transpozícií (cyklov dĺžky 2) obsahuje párny (nepárny počet) činiteľov. Všetky tieto permutácie tvoria grupu A_n a ich celkový počet je rovný $\frac{n!}{2}$. Poznamenávame, že každú permutáciu môžeme napísať v tvare súčinu transpozícií.

Cyklická grupa C_n je generovaná permutáciou $(12...n)$ a obsahuje n prvkov.

Diedrálna grupa D_n obsahuje $2n$ prvkov a je generovaná permutáciami $(12...n)$ a $(1n)(2(n-1))(3(n-2))....$

Identická grupa E_n obsahuje jeden prvok $(1)(2)...(n)$.

Cyklové indexy uvažovaných permutačných grúp predstavujú nasledujúce mnohočleny:

$$Z(S_n) = \frac{1}{n!}\sum_{(j)} h(j)\prod_{k=1}^{n} S_k^{j_k}$$

$$Z(A_n) = Z(S_n) + Z(S_n, s_1, -s_2, s_3, -s_4, ...)$$

$$Z(C_n) = n^{-1}\sum_{k|n}\phi(k)s_k^{n/k}$$

$$Z(D_n) = \frac{1}{2}Z(C_n) + \begin{cases} \frac{1}{2}s_1 s_2^{(n-1)/2} & \text{ak n je nepárne} \\ \frac{1}{4}\left(s_2^{n/2} + s_1^2 s_2^{(n-2)/2}\right) & \text{ak n je párne} \end{cases}$$

$$Z(E_n) = s_1^n$$

Ak teraz uvažujeme symetrickú grupu S_n, ako vyplýva z jej definície, existuje permutácia zobrazujúca danú r-podmnožinu na ľubovoľnú inú r-podmnožinu. Pre grupu A_n platí uvedená vlastnosť, no treba poznamenať, že požadované zobrazenie uskutočňuje párna permutácia. Nasledujúce dve formuly môžeme získať pomocou triviálnej substitúcie dvojčlena $1+x$ do zodpovedajúcich cyklových indexov príslušných grúp:

$$Z(S_n, 1+x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$$
$$Z(A_n, 1+x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$$

Identická grupa prirodzene indukuje binomické koeficienty.

$$Z(E_n, 1+x) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r.$$

S cyklickou a diedrálnou grupou je situácia zložitejšia, ak jednoduchým spôsobom uskutočníme formálnu substitúciu dvojčlena $1+x^k$ namiesto premennej s_k do formuly pre cyklový index cyklickej grupy, dostávame

$$Z(C_n, 1+x) = n^{-1} \sum_{k|n} \phi(k)(1+x^k)^{n/k}.$$

Rovnako podobnou zámenou do formuly pre cyklový index diedrálnej grupy D_n

$$Z(D_n) = \frac{1}{2} Z(C_n) + \begin{cases} \frac{1}{2} s_1 s_2^{(n-1)/2} & \text{ak n je nepárne} \\ \frac{1}{4}\left(s_2^{n/2} + s_1^2 s_2^{(n-2)/2}\right) & \text{ak n je párne} \end{cases}$$

Dostávame po formálnej stránke menej elegantný vzťah. Mechanicky túto formulu nebudeme vyjadrovať, ale treba poznamenať, že sme sa s ňou už stretli v prípade, keď sme riešili náhrdelník pre $n = 4$, kamene s dvoma farbami. Potom v prípade pre ľubovoľné n, zodpovedajúci výsledok určuje počet možných dvojfarebných náhrdelníkov s 4 kameňmi.

2.6 Vzájomne jednoznačné funkcie

Z logického hľadiska sa ukazuje užitočné mať k dispozícií takú Polyovú vetu, ktorá bude vyjadrovať počet zvážených navzájom jednoznačných funkcií pomocou cyklových indexov symetrických a alternujúcich grúp a vyčíslujúcich radov pre figúry.

Tento výsledok môže mať použitie pri ustanovení vzájomného vzťahu medzi generujúcimi funkciami napríklad stromov a zakorených stromov i druhých tried grafov.

Nech napríklad $c(x)$ je rad vyčíslujúci prvky niektorej množiny Y v súlade s ich váhami a nech jednotková grupa E má Y ako množinu objektov. Uvažujme ohraničenie mocninovej grupy E^A na podmnožinu všetkých vzájomne jednoznačných funkcií z Y^X. Ak $C(x)$ je vyčíslujúci rad pre orbity vytvorené zo vzájomne jednoznačných funkcií a určených grupou E^A, potom našu úlohu možno sformulovať nasledujúcim spôsobom: ako možno vyjadriť $C(x)$ "na jazyku" $c(x)$. Najprv uvažujme prípad $A = S_n$; po tomto riešení možno nájsť riešenie všeobecnej úlohy pomerne rýchlo. Poznamenávame, že orbity vzájomne jednoznačných funkcií určených grupou E^{S_n} zodpovedajú n-kombináciam, alebo n-podmnožinám elementov z Y. Ak dodržíme Polyove označenie, tak namiesto výrazu pre $Z(A_n) - Z(S_n)$ použijeme skrátený výraz $Z(A_n - S_n)$ a kladieme $Z(A_0 - S_0) = 1$.

Veta 2.6.1 Generujúca funkcia $C(x)$, ktorá vyčísluje vzájomne jednoznačné funkcie zobrazujúce množinu z n vzájomne rozmeniteľných prvkov do množiny objektov s vyčíslujúcim radom pre figúry $c(x)$, je daná funkciou

$$C(x) = Z(A_n - S_n, c(x)).$$

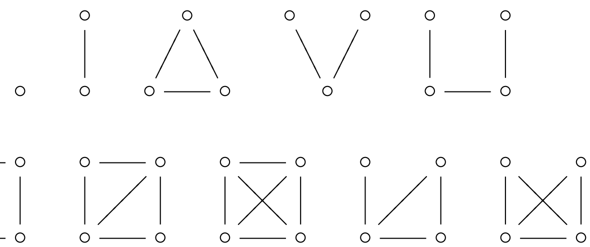
Prv než dokážeme vyššie uvedenú vetu, najskôr ukážeme jej použitie na príklade pre $n = 3$. Nech $c(x)$ je generujúca funkcia pre množinu Y súvislých grafov tak, že koeficient pri x^m v $c(x)$ je rovný počtu súvislých grafov rádu m. Je známe, že niekoľko prvých členov radu $c(x)$ má tvar

$$c(x) = x + x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 11x^5 + 112x^6 + ...$$

Nech $C(x)$ je generujúca funkcia pre grafy, ktoré majú práve tri komponenty súvislosti, pričom všetky tri komponenty súvislosti sú v grafe rôzne. Uvažujme mocninovú grupu E^{S_3} v množine objektov Y^X. V tomto prípade orbity vzájomne jednoznačných funkcií, definovaných grupou E^{S_3}, zodpovedajú grafom vyčíslených funkciou $C(x)$. Okrem toho váha každej orbity je rovná rádu toho grafu, ktorý zodpovedá tejto orbite.

Formula pre cyklový index $Z(A_3 - S_3)$ je určená formulou

$$Z(S_3; s_1, -s_2, s_3) = \frac{1}{3}(s_1^3 - 3s_1 s_2 + 2s_3)$$



Obrázok 2.8: Všetky súvislé grafy rádov 1,2,3,4.

lebo $Z(A_n) = Z(S_n) + Z(S_n; s_1, -s_2, s_3, -s_4, ...)$. Preto ak dosadíme $c(x^k)$ namiesto každej premennej s_k do tejto formuly, dostávame niekoľko prvých členov radu $C(x)$:

$$C(x) = 2x^6 + 7x^7 + 34x^8 + ...$$

Platnosť koeficientov preverujeme tak, že zostrojíme zodpovedajúce grafy.

Dôkaz. Na dôkaz vzťahu $C(x) = Z(A_n - S_n, c(x))$ najskôr pripomíname, že rad $c(x)$ vyčísluje elementy niektorej množiny Y v súlade s ich váhami, a že grupa E^{S_n} má množinu Y^X ako množinu objektov. Z Polyovej vety vyplýva, že rad vyčíslujúci orbity všetkých funkcií, ktoré sú určené grupou E^{S_n}, je prosto $Z(S_n, c(x))$. Preto stačí dokázať, že rad $Z(A_n, c(x))$ spočítava dvakrát tie orbit, ktoré sa skladajú zo vzájomne jednoznačných funkcií a všetky ostatné zostávajúce orbity len jeden krát.

Najskôr poznamenávame, že ak funkcie vzájomne jednoznačne zobrazujú X na seba, potom počet orbít, ktoré tvoria všetky také funkcie určené grupou $E_n^{A_n}$, je rovný 2. To ihneď vyplýva z nasledujúceho ľahko dokazujúceho faktu: dve vzájomne jednoznačné funkcie sa nezhodujú v jednej a tej istej orbite grupy $E_n^{A_n}$ práve vtedy, keď su obidve párne, alebo obidve nepárne (chápeme ich ako permutácie množiny X). Takýmto spôsobom rad $Z(A_n, c(x))$ spočítava dvakrát tie orbity grupy E^{S_n}, ktoré sa skladajú zo vzájomne jednoznačných funkcií. Ďalej ukážeme, že orbity grupy E^{S_n} skladajúce sa z funkcií, ktoré nie sú vzájomne jednoznačné, sa spočítavajú iba jeden krát. Preto uvažujme niektorú takú orbitu a dve funkcie v nej f a g. Potom existuje permutácia $\alpha \in S_n$ taká, že pre všetky $x \in X$ platí rovnosť $f(x) = g(\alpha x)$. Nevyhnutne treba dokázať, že f a g patria jednej a tej istej orbite grupy E^{A_n}.

V prípade párnej permutácie α to vyplýva z rovnosti $f(x) = g(\alpha x)$. V prípade nepárnej permutácie predpokladáme, že α je nepárna permutácia, pretože funkcia f nie je vzájomne jednoznačná, potom pre niektoré x_1 a x_2 z X také, že $x_1 \neq x_2$, máme $f(x_1) = f(x_2)$. Nech β je permutácia, ktorá zamieňa x_1 a x_2 medzi sebou ostatné prvky necháva identické, t.j. z X. Pretože β je transpozícia, potom je nepárna permutácia. Potom $\alpha\beta$ je párna permutácia a pre každé $x \in X$, $f(x) = g(\alpha\beta x)$. To znamená, že f a g patria jednej a tej istej orbite grupy E^{A_n}, a teda rad $Z(A_n, c(x))$ spočítava orbity grupy E^{A_n}, a teda rad $Z(A_n, c(x))$ spočítava orbity grupy E^{S_n}, skladajúce sa z funkcií, ktoré nie sú vzájomne jednoznačné, práve jeden krát. □

V dôsledku, ktorý uvádzame nižšie, uvažujeme všeobecný prípad, v ktorom orbity vzájomne jednoznačných funkcií na n-objektoch definujeme nie symetrickou grupou S_n, ale ľubovoľnou grupou stupňa n.

Dôsledok 2.6.1 Generujúca funkcia $C(x)$, ktorá vyčísluje vzájomne jednoznačné funkcie, určené vyčíslujúcim radom pre figúry $c(x)$ a ľubovoľnou grupou permutácií A stupňa n, je určená formulou

$$C(x) = \frac{n!}{|A|} Z(A_n - S_n, c(x)).$$

Dôkaz. Pripomíname, že $c(x)$ vyčísluje elementy množiny Y v súlade s ich váhami, že $Z(A_n - S_n, c(x))$ vyčísluje v súlade s ich váhami podmnožiny množiny Y obsahujúce n prvkov. Ako obyčajne, E označuje identickú grupu s množinou objektov Y a A označuje grupu permutácií stupňa n s množinou objektov X. Uvažujme ľubovoľnú n-podmnožinu Y_1 množiny Y. Našou snahou je dokázať, zoberieme si za cieľ ustanoviť, že počet orbít grupy E_n^A, ohraničenej na vzájomne jednoznačné funkcie v Y_1^X, je rovný $\frac{n!}{|A|}$. No tento záver ihneď vyplýva z ohraničenej formy Burnsidovej lemy, pretože v grupe E_n^A jedinou permutáciou zanechávajúcou identickou ľubovoľnú vzájomne jednoznačnú funkciu v Y_1^X je identická permutácia, ktorá zanecháva identickými všetkých $n!$ takých funkcií. □

V aplikáciach tejto vety často treba spočítať mnohočleny $Z(A_n - S_n)$. Niekedy píšeme $Z(A_\infty - S_\infty)$ namiesto $\sum_{n=0}^{\infty} Z(A_n - S_n)$. Riordan odvodil nasledujúcu formulu

$$Z(A_\infty - S_\infty, f(x)) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{f(x^k)}{k}\right\}.$$

Literatúra

[1] F. HARARY, E. M. PALMER; *GRAPHICAL ENUMERATION*, ACADEMIC PRESS NEW YORK AND LONDON 1973.

[2] J. MATOUŠEK, J. NEŠETŘIL; *KAPITOLY Z DISKRETNÍ MATEMATIKY*, UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE, NAKLADATELSTVÍ KAROLINUM; PRAHA 2000.

[3] E. P. LIPATOV; *TEORIJA GRAFOV I JIJO PRIMENENIJA*, IZDATEĽSTVO „ZNANIJE"; MOSKVA, 1986.

[4] F.P.PREPARATA, R.T.YEH; *ÚVOD DO TEÓRIE DISKRÉTNYCH MATEMATICKÝCH ŠTRUKTÚR*, VYDAVATEĽSTVO TECHNICKEJ A EKONOMICKEJ LITERATÚRY, BRATISLAVA 1982.

[5] P.LANKASTER; *THEORY OF MATRICES*, ACADEMIC PRESS, NEW YORK – LONDON 1969.