Teória množín

To, že medzi množinami A, B existuje bijektívne zobrazenie, budeme symbolicky označovať $A \sim B$ alebo $A \equiv B$. Vtedy hovoríme, že množiny A, B sú *ekvivalentné*. Hovoríme tiež, že také množiny A, B majú *rovnakú mohutnosť*.

Označme n mohutnosť množiny $N_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Každú množinu, pre ktorú platí, že $A \sim N_n$ nazývame *konečnou*, pričom n nazývame *počtom* jej prvkov. Množina, ktorá nie je konečná, sa nazýva *nekonečná*. Každú množinu A, ekvivalentnú s množinou $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$, nazývame *spočítateľnou* a jej mohutnosť označujeme $\aleph_0$.

Každú množinu A, ekvivalentnú s množinou všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$, nazývame *kontinuálnou* a jej mohutnosť označujeme c.

Mohutnosti ľubovoľných množín sa nazývajú *kardinálnymi číslami*. Kardinálne čísla konečných množín sa nazývajú konečné a kardinálne čísla nekonečných množín nekonečné. Kardinálne číslo c sa nazýva *mohutnosť kontinua*.

Budeme hovoriť, že $|A| \leq |B|$, ak A je ekvivalentná niektorej podmnožine množiny B. Budeme hovoriť, že $|A| < |B|$, ak $|A| \leq |B|$, ale A a B nie sú ekvivalentné.

1. Dokážte, že
   (a) $A \sim A$ (reflexívnosť)
   (b) ak $A \sim B$, tak $B \sim A$ (symetrickosť)
   (c) ak $A \sim B$ a $B \sim C$, tak $A \sim C$ (tranzitívnosť)

2. Dokážte, že
   (a) $A \sim B \iff |A| = |B|$
   (b) ak $|A_1| = |A_2|$, $|B_1| = |B_2|$ a $|A_1| \leq |B_1|$, tak $|A_2| \leq |B_2|$
   (c) ak existuje surjektívne zobrazenie z A do B, tak $|B| \leq |A|$

3.* Nech $A \supseteq A_1 \supseteq A_2$ a $A \sim A_2$. Dokážte, že $A \sim A_1$.

4. Dokážte, že ak $|A| \leq |B|$ a $|B| \leq |A|$, tak $|A| = |B|$ (Cantor-Bersteinova veta).

5. Dokážte, že
   (a) každá podmnožina konečnej množiny je konečná;
   (b) zjednotenie konečného počtu konečných množín je konečná množina;
   (c) karteziánsky súčin konečného počtu konečných množín je konečná množina.

6. (a) Dokážte, že konečná množina nie je ekvivalentná žiadnej svojej vlastnej podmnožine a žiadnej svojej nadmnožine.
   (b) Dokážte, že dve konečné množiny sú ekvivalentné práve vtedy, keď obsahujú rovnaký počet prvkov.
   (c) Dokážte, že kardinálnych čísel je nekonečne veľa.

7. Dokážte, že z každej nekonečnej množiny môžeme vydeliť spočítateľnú podmnožinu.

8. Dokážte, že množina je nekonečná vtedy a len vtedy, keď je ekvivalentná niektorej svojej podmožine.

9. Dokážte, že každá podmnožina spočítateľnej množiny je spočítateľná alebo konečná.

10. (a) Nech obor definície funkcie je spočítateľná množina. Dokážte, že obor hodnôt tejto funkcie je konečná alebo spočítateľná množina.

    (b) Dokážte, že neprázdna množina A je spočítateľná alebo konečná práve vtedy, keď je množinou hodnôt niektorej funkcie z N do A.

11. Dokážte, že ak zo spočítateľnej množiny vynecháme konečnú podmnožinu, tak zostávajúca množina nekonečná.

12. Dokážte, že

    (a) ak A a B sú spočítateľné množiny, tak $A \cup B$ je tiež spočítateľná;

    (b) ak všetky A_i sú konečné, neprázdne a po dvoch disjunktné množiny, tak

    $$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

    je spočítateľná množina.

13. Dokážte, že

    (a) ak A je nekonečná množina a B je konečná alebo spočítateľná množina, tak $A \cup B \sim A$;

    (b) ak A je nekonečná a nespočítateľná množina a B je konečná alebo spočítateľná množina, tak $A \setminus B \sim A$.

14. Dokážte, že ak $A_1, \dots, A_n$ $(n \geq 1)$ sú spočítateľné množiny, tak aj $A_1 \times \cdots \times A_n$ je spočítateľná množina.

15. Dokážte, že

    (a) množina celých čísel je spočítateľná;

    (b) množina racionálnych čísel je spočítateľná;

    (c) množina racionálnych čísel intervalu $\langle a, b \rangle$ je spočítateľná pre $a < b$;

    (d) množina dvojíc (x, y), kde x a y sú racionálne čísla, je spočítateľná.

16. Dokážte, že množina všetkých konenčných postupností, vytvorených z prvkov niektorej spočítateľnej množiny je spočítateľná.

17. Dokážte, že množina všetkých konečných podmnožín spočítateľnej množiny je spočítateľná.

18. Dokážte, že množina mnohočlenov jednej premennej s celočíselnými koeficientami je spočítateľná.

19. Dokážte, že množina *algebraických čísel*, t.j. čísel, ktoré sú koreňmi mnohočlenov jednej premennej s celočíselnými koeficientami, je spočítateľná.

20. Dokážte, že ľubovoľná množina po dvoch disjunktných otvorených intervalov na reálnej priamke nie je väčšia než spočítateľná.

21.* Dokážte, že mohutnosť ľubovoľnej množiny po dvoch disjunktných písmen T v rovine nie je väčšia ako spočítateľná.

22. Dokážte, že ak $A \subseteq \mathbb{R}$ a existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky rôzne prvky $x, y \in A$ také, že platí $|x - y| \geq \delta$, tak A je konečná alebo spočítateľná.

23. Dokážte, že množina bodov nespojitosti rýdzomonotónnej funkcie na reálnej osi nie je viac ako spočítateľná.

24. Dokážte, že
    (a) $(0,1) \sim \langle 0,1\rangle \sim \langle 0,1) \sim (0,1\rangle$;
    (b) $\langle a,b\rangle \sim \langle c,d\rangle$, kde $a < b$ a $c < d$;
    (c) $\langle a,b\rangle \sim \mathbb{R}$.

25. Dokážte, že množiny bodov štvorca a úsečky sú ekvivalentné.

26. Dokážte, že množiny bodov dvoch kružníc sú ekvivalentné.

27. Dokážte, že $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1)$.

28. Zostrojte bijektívne zobrazenie medzi bodmi štvorca a roviny.

29.* Dokážte, že množina bodov intervalu $\langle 0,1\rangle$ nie je spočítateľná.

30. Aká je mohutnosť množiny všetkých iracionálnych čísel ?

31. Dokážte existenciu *transcendentných* (t.j. nealgebraických) čísel.

32. Dokážte, že zjednotenie konečného alebo spočítateľného počtu množín mohutnosti c má mohutnosť c.

33.* Dokážte, že množina všetkých spočítateľných postupností prirodzených čísel má mohutnosť c.

34. Dokážte, že
    (a) množina všetkých spočítateľných postupností zložených z 0 a 1 má mohutnosť c;
    (b) $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$.

35. Dokážte, že
    (a) ak všetky A_i sú kontinuálne, tak $|A_1 \times \cdots \times A_n| = c$;
    (b) ak pre všetky i platí $|A_i| = i$ a $|I| = \aleph_0$, tak

$$\Big|\prod_{i\in I} A_i\Big| = c.$$

36. Aká je mohutnosť množiny
    (a) všetkých spočítateľných postupností reálnych čísel;
    (b) všetkých spojitých funkcií na reálnej priamke;

(c) rýdzomonotónnych funkcií na reálnej priamke ?

37. Nech A je spočítateľná množina bodov na reálnej priamke. Možno potom vybrať a tak, aby $\{x + a \mid x \in A\} \cap A = \emptyset$?

38.* Dokážte, že množina reálnych funkcií definovaných na intervale $\langle 0, 1\rangle$ má mohutnosť väčšiu ako c.

39. Dokážte, že mohutnosť množiny všetkých funkcií definovaných na intervale $\langle a, b\rangle$ pre $a < b$ a nespojitých aspoň v jednom bode je väčšia ako c.

40.* Dokážte, že množina všetkých podmnožín $\mathcal{P}(A)$ množiny A má mohutnosť väčšiu ako A.

41. Nech $\mathcal{S}$ je systém množín taký, že pre každú množinu A z $\mathcal{S}$ existuje množina B z $\mathcal{S}$ taká, že nie je ekvivalentná žiadnej podmnožine množiny A. Dokážte, že zjednotenie všetkých množín z $\mathcal{S}$ nie je ekvivalentné žiadnej podmnožine množiny z $\mathcal{S}$.

42. Dokážte, že neexistuje množina, ktorá obsahuje všetky množiny.

43. Budeme hovoriť, že postupnosť kladných celých čísel $b_1, b_2, \ldots$ *rastie rýchlejšie* ako postupnosť $a_1, a_2, \ldots$, ak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Dokážte, že pre každú postupnosť kladných celých čísel existuje postupnosť, rastúca rýchlejšie.

Fibonacciho čísla

Postupnosť *Fibonacciho čísel* je postupnosť definovaná rekurentným predpisom:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 1 \\
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \qquad n \geq 0.
\end{aligned}
$$

1. Dokážte, že
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

2. Dokážte, že
$$\sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$

3. Dokážte, že
$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}.$$

4. Dokážte, že
$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

5. Dokážte, že
   (a) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}, \qquad n \geq 1, m \geq 0$
   (b) ak m delí n, tak F_m delí F_n
   (c) $\mathrm{NSD}(F_n, F_{n+1}) = 1$
   (d) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$
   (e) $F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$
   (f) $(F_nF_{n+3})^2 + (2F_{n+1}F_{n+2})^2 = (F_{2n+3})^2$

6. Koľko je reťazcov zo symbolov 0 a 1 dĺžky n takých, že v nich nenasledujú dve jednotky za sebou ?

7. Každé prirodzené číslo $r > 1$ možno jednoznačne zapísať v tvare takého súčtu Fibonacciho čísel, že každé Fibonacciho číslo sa v ňom vyskytuje najviac raz a žiadne dve susedné Fibonacciho čísla sa v ňom nevyskytujú súčasne. Dokážte.

8. Nech
$$
\begin{aligned}
G_0 &= 1 \\
G_1 &= 2 \\
G_{n+2} &= G_{n+1} + G_n - 1, \qquad n \geq 0
\end{aligned}
$$
Nájdite vyjadrenie postupnosti G_n pomocou Fibonacciho čísel.

9.* Nech

$$G_0 = 0$$
$$G_1 = 2$$
$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n + 1 - n, \qquad n \geq 0$$

Nájdite vyjadrenie postupnosti G_n pomocou Fibonacciho čísel.

Dirichletov princíp

1. Dokážte, že z ľubovoľných 52 čísel možno vybrať dve tak, že ich súčet alebo rozdiel je deliteľný 100-mi.

2. V štvorci je daných 9 bodov, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Dokážte, že tri z týchto bodov sú vrcholmi trojuholníka, ktorého obsah neprevyšuje 1/8 obsahu štvorca.

3. Dokážte, že v ľubovoľnom konvexnom 11-uholníku sa nájdu dve uhlopriečky s vlastnosťou, že uhol priamok, na ktorých ležia je menší ako 5 stupňov.

4. V miestnosti je ľubovoľne rozmiestnených 30 stoličiek. 30 ľudí, sediacich na týchto stoličkách, hrá nasledovnú hru: na povel všetci vstanú a snažia sa dostať na najbližšiu susednú stoličku. Dokážte, že o žiadnu stoličku nie je viac ako 6 záujemcov.

5. V rovine je daná množina M 90-tich bodov, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Každý z nich je spojený úsečkou s aspoň 10-timi ďalšími z nich. Dokážte, že ku každému bodu množiny M možno vybrať tri ďalšie body množiny M tak, že vo vzniknutej štvorici je každý bod spojený aspoň s dvomi ďalšími.

1. Dokážte, že pre každé dve reálne čísla $a > 1$, $b > 1$ platí:

$$\log_a b + \log_b a \geq 2$$

2. Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

3. Dokážte, že funkcia f: $y = -2x^2$ je na intervale $(-\infty, 0)$ rastúca.

4. Dokážte, že ak nemožno kružidlom a pravítkom zostrojiť uhol o veľkosto 1°, tak nemožno zostrojiť ani uhol s veľkosťou 19°.

5. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ deliteľné číslom 133.

6. Nech sa dve kružnice pretínajú v bodoch A, B. Ak AC a AD sú ich priemery, tak body B, C, D ležia na jednej priamke. Dokážte!

7. Dokážte, že pre každé reálne α rôzne od $\frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha \operatorname{cotg}\alpha + \sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}$$

8. Dokážte platnosť rovností pre prípustné hodnoty α, β:
   (a) $\cos(90^\circ + \alpha)\cos(180^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ + \alpha)\sin(180^\circ + \alpha) = 0$
   (b)
   $$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\beta = \frac{\sin^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

9. Dokážte, že spojnice číslic 1, 4 a 2, 9 na ciferníku hodín sú na seba kolmé.

10. Kružnice, ktorých priemery sú odvesny pravouhlého trojuholníka, sa pretínajú na jeho prepone. Dokážte.

11. Dokážte nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom: Pre kladné reálne čísla a, b platí $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$. Kedy platí rovnosť ?

12. Trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C. Označme C_1 pätu výšky z bodu C na stranu AB, P_1 pätu kolmice z bodu C_1 na stranu AC, P_2 pätu kolmice z bodu C_1 na BC. Nech $|CC_1| = 1$. Dokážte, že $|CP_1| = \sin\alpha$, $|CP_2| = \cos\alpha$, $|BC_1| = \operatorname{tg}\alpha$, $|AC_1| = \operatorname{cotg}\alpha$.

13. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$$

14. Dokážte, že funkcia $y = 2/x$ je klesajúca na intervale $(-\infty, 0)$, aj na intervale $(0, \infty)$.

15. Pre každé dve reálne čísla a, b platí $|a| + |b| \geq |a+b|$. Dokážte!

16. Dokážte, že v trojuholníku ABC platí: $a + b > 2t_c$.

17. Ak má geometrický útvar dve na seba kolmé osi súmernosti, tak je stredovo súmerný. Dokážte! Platí obrátená veta ?

18. Dokážte, že $\sqrt{5}$ je iracionálne číslo.

19. Šesť družstiev sa zúčastnilo turnaja, ktorý sa hral systémom „každý s každým“. Turnaj trval dva dni. Dokážte, že existujú tri družstvá, ktoré odohrali všetky svoje zápasy počas jedného dňa.

20. Dokážte, že pre uhly trojuholníka α, β, γ platí

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$