Eduard Toman

Diskrétna matematika

Verzia 1.1, 21. septembra 2000

KAPITOLA 1

Rozklady prirodzených čísel

1.1. Partície — rozklady

Teória partícií predstavuje jednu z najzaujímavejších častí klasickej kombinatoriky. Dodnes existuje okolo nich veľa nevyriešených závažných problémov. V tomto odseku ukážeme niekoľko užitočných jednoduchých metód.

Definícia 1.1. *Partíciou* celého kladného čísla $n \in \mathbb{N}^+$ nazývame vyjadrenie čísla n v tvare súčtu celých kladných čísel: $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, kde $a_i \in \mathbb{N}^+$ pre $i = 1, \ldots, k$.

Obyčajne sa pri štúdiu rozlišujú dva prípady: dve partície, ktoré sa líšia len poradím sčítancov považujeme za rôzne alebo rovnaké.

(a) Najprv sa budeme zaoberať prípadom, keď dve partície líšiace sa len poradím sčítancov považujeme za rôzne: napr. partície $2+3+1$ a $1+2+3$ čísla 6 pokladáme za rôzne. Označme počet všetkých takýchto partícií čísla n pozostávajúcich z presne r sčítancov ($r \le n$) symbolom $p(n,r)$ — hovoríme o *usporiadaných* partíciách čísla n.

Určíme číslo $p(n,r)$ nasledujúcim spôsobom: Nakreslíme vedľa seba n bodov; medzi nimi dostávame $n-1$ medzier. Zvoľme z nich $r-1$ medzier (táto voľba sa dá uskutočniť $\binom{n-1}{r-1}$ spôsobmi) a uložme do nich zvislé čiarky — oddeľovače. Tým sa pôvodných n bodov rozdelí na r častí, pričom rôznym voľbám zmienených $r-1$ medzier zodpovedajú rôzne rozklady — aspoň čo do poradia, čiže usporiadané partície čísla n na r častí.

Príklad 1.2. Pre $n = 5$ a $r = 2$ je to

$$\circ \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ \qquad \circ\ \circ \mid \circ\ \circ\ \circ \qquad \circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ \qquad \circ\ \circ\ \circ\ \circ \mid \circ$$

teda dostávame 4 rôzne partície.

Z vyššie povedaného vlastne vyplýva, že sme dokázali nasledujúcu vetu.

Veta 1.3. Počet navzájom rôznych (aspoň poradím) partícií čísla n na r častí sa rovná $\binom{n-1}{r-1}$.

Príklad 1.4. Ak $n = 6$, $r = 3$, tak $p(6,3) = \binom{5}{2} = 10$. Ide o tieto partície: $1+2+3$, $1+3+2$, $2+1+3$, $2+3+1$, $3+2+1$, $3+1+2$, $1+1+4$, $4+1+1$, $1+4+1$, $2+2+2$.

Teraz už ľahko určíme počet všetkých rôznych (aspoň poradím) partícií čísla n; ak toto číslo označíme $p(n)$, tak zrejme platí

$$p(n) = p(n,1) + p(n,2) + \cdots + p(n,n)$$

Použitím vety 1.3 dostávame

$$p(n) = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}$$

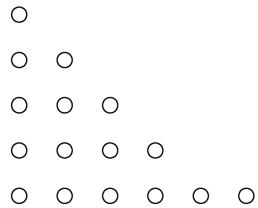
(b) Preskúmajme teraz prípad, keď dve partície, líšiace sa len poradím sčítancov považujeme za totožné (t.j. $1+2+3$, $2+3+1$ neodlišujeme).

Tento prípad je o niečo zložitejší ako predchádzajúci. Označme počet takýchto partícií čísla n o r sčítancoch symbolom $p'(n,r)$.

Nech $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ je nejaká partícia čísla n na k častí. Priraďme k nej partíciu čísla

$$n - k = (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \cdots + (a_k - 1)$$

Takto sa každej partícii čísla n na k častí priradí nejaká partícia čísla $n-k$ na k alebo menej častí (pretože niektoré $a_i - 1$ sa môžu rovnať aj nule). Pritom dvom partíciám čísla n, ktoré sa



Obr. 1.

navzájom líšia nielen poradím, prislúchajú rôzne partície čísla $n-k$. Teda počet partícií čísla n na k častí sa rovná súčtu počtu partícií čísla $n-k$ na k alebo menej častí, čiže

$$p'(n,k)=\sum_{i=1}^{k}p'(n-k,i) \tag{1}$$

Zrejme pre každé $j>m$ je $p'(m,j)=0$, preto pomocou rekurentného vzťahu (1) možno vypočítať hodnotu $p'(n,r)$ pre ľubovoľné priridzené čísla n a r, $r<n$.

Príklad 1.5. Vypočítajte $p'(5,3)$.

Riešenie: Budeme k tomu potrebovať vedieť hodnoty čísel $p'(2,i)$ pre $i=1,2,3$: $p'(2,3)=0$, $p'(2,2)=1$, $p'(2,1)=1$. Dostávame teda $p'(5,3)=1+1+0=2$. Ide o partície $1+1+3$, $1+2+2$.

Znakom $p'(n)$ označíme počet všetkých takýchto partícií čísla n (poradie neberieme do úvahy). Tak dostávame: $p'(n)=p'(n,1)+p'(n,2)+\cdots+p'(n,n)$, teda

$$p'(n)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}p'(n-r,i)$$

Príklad 1.6. Pomocou partícií, u ktorých berieme poradie sčítancov do úvahy, odvodíme vzorec pre výpočet kombinácií s opakovaním k-tej triedy z množiny o n prvkoch.

Riešenie: Majme n rôznych prvkov. Nech a_i $(i=1,2,\dots,n)$ označuje počet výskytov prvku s číslom i v kombinácii s opakovaním k-tej triedy z množiny o n prvkoch. Potom platí, že a_1+ $+a_2+\cdots+a_n=k$, niektoré a_i však môžu byť rovné 0. Pripočítajme k obom stranám číslo n. Dostávame

$$(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_n+1)=n+k$$

teda ku uvažovanej kombinácii sme priradili partíciu čísla $n+k$ o n sčítancoch (poradie sčítancov berieme do úvahy). Obrátene, ku každej partícii čísla $n+k$ o n sčítancoch môžeme inverznou operáciou jednoznačne priradiť kombináciu s opakovaním k-tej triedy z množiny, ktorá má n prvkov. Počet takých partícií je $\binom{n+k-1}{n-1}=\binom{n+k-1}{k}$, čo je známy výraz pre výpočet kombinácií s opakovaním k-tej triedy z množiny obsahujúcej n prvkov.

Uvedieme ešte niekoľko najzaujímavejších výsledkov o partíciách. Využijeme pritom ich geometrickú interpretáciu, aby sme demonštrovali ďalšie zaujímavé, a pritom jednoduché kombinatorické myšlienkové pochody. Budeme pritom uvažovať neusporiadané partície.

Pri dokazovaní vlastností rozkladov sa často používa ich interpretácia pomocou Ferrersových diagramov. *Ferrersovým diagramom* rozkladu čísla n

$$n=a_1+a_2+\cdots+a_k \qquad a_1\le a_2\le\cdots\le a_k$$

rozumieme n bodov v rovine, ktoré sú rozmiestnené v k radoch, pričom v i-tom rade $(i=1,2,\dots,k)$ je a_i bodov. Napríklad rozkladu $16=1+2+3+4+6$ zodpovedá Ferrersov diagram na obrázku 1.

Poznámka 1.7. Keďže poradie sčítancov nemá v rozklade žiadny význam, môžeme riadky usporiadať tak, aby sa ich dĺžka zhora dole neskracovala. Okrem toho, prvé body všetkých riadkov zobrazujeme do jedného stĺpca. Takéto diagramy sa nazývajú v literatúre aj *normálne*.

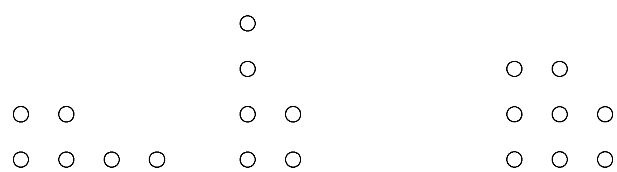
Pomocou Ferrersových diagramov môžeme dokazovať rôzne vlastnosti partícií. Nech $Z(n,m)$ označuje počet všetkých partícií čísla n (uvažujeme neusporiadané partície), pozostávajúce z najviac m častí (sčítancov). Potom $Z(n,m) = p'(n,1) + p'(n,2) + \cdots + p'(n,m)$. Zrejme $Z(n,n) = p'(n)$. Ďalej označme $Q(n,m)$ počet všetkých takých partícií čísla n, ktorých sčítance neprevyšujú číslo m.

Veta 1.8. $Q(n,m) = Z(n,m)$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq m \geq 1$.

Dôkaz: Zoberme nejakú partíciu čísla $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$. Nakoľko nezáleží na poradí sčítancov, môžeme predpokladať, že $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_r$. Tejto partícii možno priradiť diagram, ktorého i-ty riadok pozostáva z a_i bodov. Ak teraz diagram čítame vertikálne, dostaneme (vo všeobecnosti) inú partíciu čísla n s vlastnosťou, že žiaden sčítanec neprevyšuje číslo r (skutočne, diagram pozostával z r riadkov). Teda partícii s nanajvýš r sčítancami vieme priradiť partíciu so sčítancami, ktoré neprevyšujú r. Ľahko sa dá overiť, že toto priradenie je bijekcia, z čoho už vyplýva tvrdenie vety. $\square$

Duálny Ferresov diagram k danému Ferrersovmu diagramu dostaneme tak, že transponujeme riadky a stĺpce a prevedieme ho na normálny tvar, t.j. usporiadame riadky podľa veľkosti.

Rozklad čísla n nazveme *samoduálnym*, ak jeho Ferrersov diagram sa po transponovaní a usporiadaní prvkov nezmení.



(a) Navzájom duálne diagramy

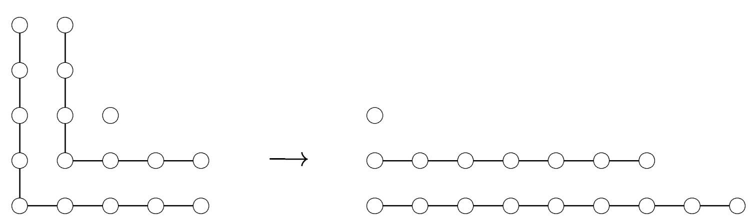
(b) Samoduálny diagram

Obr. 2

Ukážeme teraz tvrdenie, ktoré poukazuje na peknú vlastnosť samoduálnych diagramov.

Veta 1.9. Počet samoduálnych rozkladov čísla n je rovnaký ako počet rozkladov čísla n na rôzne nepárne sčítance.

Dôkaz: Uvedieme príklad samoduálneho diagramu, ktorému vieme priradiť jednoznačne rozklad toho istého prirodzeného čísla na rôzne nepárne sčítance. Na obrázku 3 je $n = 17$. $\square$



Obr. 3.

Veta 1.10. Pre všetky prirodzené čísla $n \geq m \geq 1$ platí

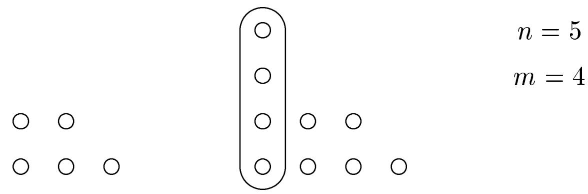
$$Q(n,m) = Q(n,m-1) + Q(n-m,m)$$

kde $Q(0,m) = 1$ kladieme definitoricky.

Dôkaz: je založený na fakte, že počet tých partícií čísla n, ktoré neobsahujú sčítance väčšie ako $m-1$, je $Q(n,m-1)$ a počet tých partícií, ktorých nejaký sčítanec je rovný m, sa rovná $Q(n-m,m)$. $\square$

Veta 1.11. Počet partícií čísla n o najviac m sčítancoch je rovný počtu partícií čísla $n+m$ o m sčítancoch.

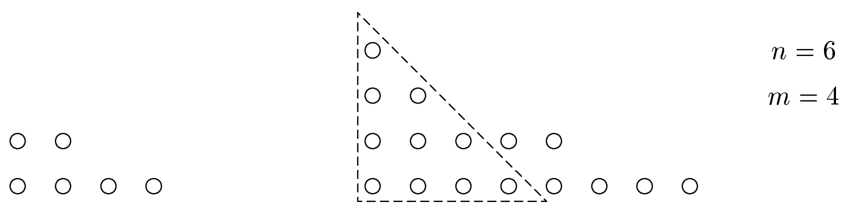
Dôkaz: Diagram, ktorý zobrazuje partíciu čísla n o najviac m sčítancoch, sa skladá z n bodov rozložených v najviac m riadkoch. Pripojme ku každému z týchto diagramov stĺpec, ktorý sa skladá z m bodov. Dostaneme tak diagram, ktorý obsahuje $n+m$ bodov rozmiestnených v m riadkoch. Ak obrátene v ľubovoľnom diagrame, ktorý sa skladá z $n+m$ bodov v m riadkoch, vynecháme prvý stĺpec, dostaneme diagram o n bodoch, ktorý má najviac m riadkov. Situácia pre $n=5$ a $m=4$ je na obrázku 4. □



Obr. 4.

Veta 1.12. Počet partícií čísla n o najviac m sčítancoch je rovný počtu partícií čísla $n+\binom{m+1}{2}$ na m vzájomne rôznych sčítancov.

Dôkaz: Každý rozklad čísla n na súčet najviac m sčítancov môžeme znázorniť diagramom o n bodoch, ktorý obsahuje najviac m riadkov. Pripojíme ku každému takému diagramu rovnoramenný trojuholník o „strane“ m riadkov a potom prevedieme tento diagram na normálny tvar. Situácia pre $n=6$ a $m=4$ je na obrázku 5.



Obr. 5.

Počet bodov v trojuholníku je $\frac{m(m+1)}{2}$, preto nový diagram obsahuje $n+\frac{(m+1)m}{2}$ bodov. rozložených v m riadkoch. Pritom všetky riadky tohoto diagramu majú vzájomne rôzne dĺžky, pretože dĺžky riadkov pôvodného diagramu neubúdajú a dĺžky riadkov trojuholníka sa neustále zväčšujú. To znamená, že po pripojení trojuholníka dostaneme diagram, ktorého dĺžky riadkov narastajú. Odtiaľ vyplýva, že sa v ňom nemôžu vykytovať riadky rovnakej dĺžky.

Obrátene, z každého diagramu, ktorý zobrazuje rozklad čísla $n+\frac{m(m+1)}{2}$ na m vzájomne rôznych sčítancov, je možné „odstrániť“ rovnoramenný trojuholník obsahujúci m riadkov a získať tak diagram znázorňujúci rozklad čísla n na súčet najviac m sčítancov.

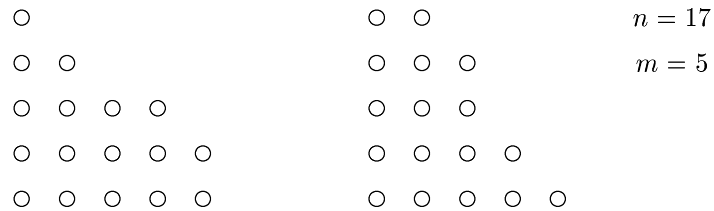
Toto priradenie diagramov oboch typov ukazuje, že ich počty sú rovnaké. Tým je veta dokázaná. □

Použitím duality partícií môžeme porovnávať partície podliehajúce niektorým obmedzujúcim podmienkam, týkajúcim sa veľkosti.

Veta 1.13. Počet partícií čísla n o m sčítancoch je rovný počtu partícií na sčítance, z ktorých žiaden nie je väčší ako m a zároveň aspoň jeden je rovný m (pozri obrázok 6).

Veta 1.14. Počet rozkladov čísla n na súčet párnych čísel je rovný počtu partícií, v ktorých sa každý zo sčítancov vyskytuje párny počet krát (pozri obrázok 7).

Rovnakým spôsobom sa môžeme presvedčiť, že platí aj nasledujúce tvrdenie.



Obr. 6.

Obr. 7.

Veta 1.15. Počet rozkladov čísla n na súčet nepárnych čísel je rovný počtu rozkladov, v ktorých sa každý zo sčítancov, okrem najväščieho, vyskytuje párny počet krát a najväčší sčítanec nepárny počet krát (pozri obrázok 8).

Obr. 8.

V nasledujúcej časti dokážeme o partíciách dve zložitejšie tvrdenia.

Veta 1.16. Počet rozkladov čísla n na navzájom rôzne sčítance je rovný počtu rozkladov čísla n na nepárne sčítance, t.j. každý sčítanec je nepárne číslo.

Dôkaz: Určíme vzájomne jednoznačný vzťah medzi množinami rozkladov, o ktorých sa hovorí vo vyššie uvedenej vete. Uvažujme rozklad čísla n na nepárne sčítance $b_1, \ldots, b_p$, teda $n = b_1 + b_2 + \cdots + b_p$, kde sa sčítanec b_i vyskytuje v rozklade r_i-krát, $1 \leq i \leq p$. Nech $r_i = 2^{q_1} + 2^{q_2} + \cdots$ $(q_1 > q_2 > \cdots)$ je zápis čísla r_i v tvare súčtu mocnín 2. Teraz uskutočníme zámenu r_i sčítancov b_i na po dvoch rôzne sčítance $b_i 2^{q_1}, b_i 2^{q_2}, \ldots$ (táto zámena zachováva súčet sčítancov rozkladu). Ak zopakujeme túto operáciu pre každé i, $1 \leq i \leq p$ a usporiadame sčítance neklesajúco, ako výsledok dostávame rozklad čísla n na navzájom rôzne sčítance. To vyplýva z toho faktu, že každé prirodzené číslo môžeme jednoznačne vyjadriť v tvare súčinu nepárneho čísla s mocninou 2. Ako príklad uvedieme opísanú transformáciu pre rozklad $26 = 7 + 5 + 5 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 7 \cdot 2^0 + 5 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^1 + 1 \cdot (2^1 + 2^0) = 7 + 10 + 6 + 2 + 1 = 1 + 2 + 6 + 7 + 10$.

Ľahko vidno, že môžeme získať aj obrátenú transformáciu pre ľubovoľný rozklad na navzájom rôzne sčítance, ak vyjadríme každý sčítanec ako $p2^q$, kde p je nepárne číslo, ďalej združíme sčítance v závislosti od „nepárneho činiteľa“ p a zameníme každú takú skupinu $p2^{q_1}$, $p2^{q_2}$, ... na $r = 2^{q_1} + 2^{q_2} + \cdots$ sčítancov rovných p. Takýmto spôsobom opísaná transformácia definuje vzájomne jednoznačný vzťah medzi rozkladmi na nepárne sčítance a rozkladmi na po dvoch rôzne sčítance. □

1.2. Eulerova veta

V súvislosti s niektorými problémami partícií študoval L. Euler nekonečný súčin

$$A = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n)\cdots \tag{2}$$

Vynásobme v tomto súčine prvých 22 členov; dostaneme výraz

$$A = [1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + \cdots](1-x^{23})(1-x^{24})\cdots(1-x^n)\cdots \tag{3}$$

kde bodky vo výraze, ktorý je vnútri lomenej zátvorky značia, že nasledujú mocniny s exponentami vyššími ako 22. Tieto členy sme nevypisovali, lebo po vynásobení výrazu v lomenej zátvorke členmi $(1-x^{23})$, $(1-x^{24})$, atď. sa ich koeficienty menia. Vypísané členy v lomenej zátvorke sa však viac meniť nebudú. To znamená, že po „vynásobení všetkých členov“ dostaneme nekonečný rad, ktorého niekoľko prvých členov už poznáme:

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + \cdots \tag{4}$$

Je vidieť, že po dvoch záporných členoch nasledujú dva kladné, potom opäť dva záporné atď. Ale objaviť zákonitosť postupnosti exponentov týchto členov je omnoho zložitejšie. Experimentálnou cestou dospel Euler k tomuto tvrdeniu:

Veta 1.17. V rade, ktorý získame z nekonečného súčinu

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n)\cdots \tag{5}$$

sú rôzne od nuly len členy tvaru $(-1)^k x^{\frac{3k^2 \pm k}{2}}$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo.

Dôkaz: Uvedieme veľmi jednoduchý geometrický dôkaz Eulerovej vety. Najprv preformulujeme túto vetu do jazyka teórie partícií.

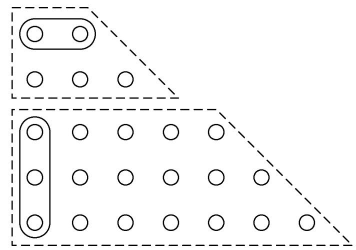
Vynásobením dvojčlenov vo výraze (5) vzniknú jednočleny $\pm x^m$ práve toľkokrát, koľkými spôsobmi je možné rozložiť číslo m na rôzne sčítance. Ak je počet sčítancov párny, tak pôjde o x^m a ak je počet sčítancov nepárny, pôjde o $-x^m$. Napríklad partícii $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ zodpovedá sčítanec $(-x^5)(-x^4)(-x^2)(-x^1) = x^{12}$ a rozkladu $12 = 5+4+3$ sčítanec $(-x^5)(-x^4)(-x^3) = -x^{12}$.

Odtiaľ dostávame, že koeficient pri x^m v rade (4) je rovný rozdielu počtu rozkladov na párny počet rôznych sčítancov a počtu rozkladov na nepárny počet rôznych sčítancov. Eulerovu vetu teda môžeme sformulovať takto:

> Nech číslo m nemôžeme písať v tvare $\frac{3k^2 \pm k}{2}$, kde k je vhodné prirodzené číslo. Potom počet rozkladov čísla m na párny počet navzájom rôznych sčítancov je rovný počtu rozkladov čísla m na nepárny počet navzájom rôznych sčítancov. Pre každé číslo m, ktoré je možné písať v tvare $\frac{3k^2 \pm k}{2}$, je rozdiel medzi týmito počtami rovný $(-1)^k$, t.j. ak k je párne číslo, tak potom počet rozkladov na párny počet rôznych sčítancov je o 1 väčší než počet rozkladov na nepárny počet rôznych sčítancov; ak je k nepárne číslo, tak je to naopak.

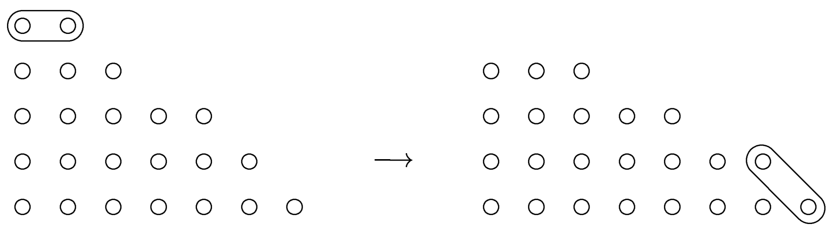
Na to, aby sme dokázali Eulerovu vetu, ukážeme najprv jeden spôsob zmeny diagramu s párnym počtom riadkov na diagram s nepárnym počtom riadkov, ktorý sa skladá z toho istého počtu bodov a obrátene. Zaoberáme sa len partíciami o rôznych sčítancoch, teda dĺžky riadkov sú rôzne, a preto diagramy týchto partícií sa skladajúz niekoľkých lichobežníkov postavených na seba.

Označme počet bodov v hornom riadku diagramu písmenom s a počet riadkov dolného lichobežníka r. V príklade na obrázku 9 je $s = 2$ a $r = 3$.



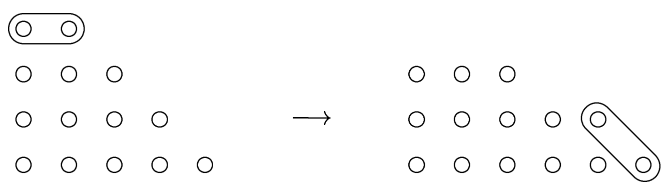
Obr. 9.

Predpokladajme, že diagram obsahuje aspoň dva lichobežníky, pričom $s \leq r$. V tomto prípade vynecháme prvý riadok a každý z posledných m riadkov rozšírime o 1 bod. Tým sa celkový počet bodov nezmení a všetky riadky budú mať rôznu dĺžku, ale zmení sa parita počtu riadkov. V prípade diagramu z obrázku 9 teda dostávame situáciu na obrázku 10.



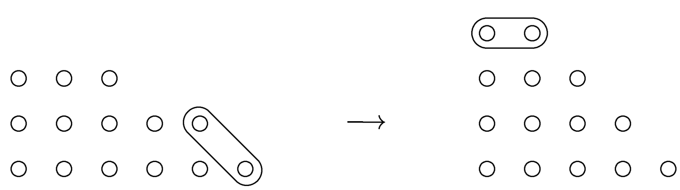
Obr. 10.

Celkom tú istú transformáciu je možné urobiť aj v prípade, keď sa diagram skladá len z jedného lichobežníka, pričom $s \leq r - 1$. V prípade diagramu na na obrázku 11 je $s = 2$ a $r = 4$.



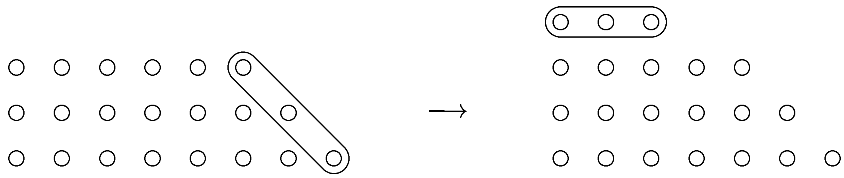
Obr. 11.

Nech teraz diagram obsahuje aspoň dva lichobežníky, pričom $s > r$. V tomto prípade odoberieme z každého riadku po jednom bode a vyrobíme z nich prvý riadok nového diagramu. Podľa predpokladu je $s > r$, a preto je tento nový riadok kratší ako prvý riadok pôvodného diagramu. Vzhľadom k tomu, že sme odoberali body od všetkých riadkov spodného lichobežníka, majú aj v novom diagrame všetky riadky rôzne dĺžky. Nový diagram pritom obsahuje práve toľko bodov ako pôvodný, ale parita počtu riadkov sa zmenila, pretože pribudol nový riadok. Na obrázku 12 je $s = 3$ a $r = 2$.



Obr. 12.

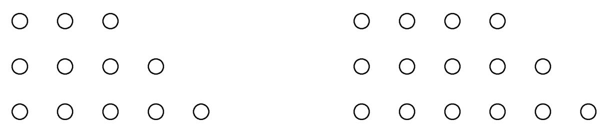
Rovnakým spôsobom môžeme transformovať aj diagramy, ktoré sa skladajú z jediného lichobežníka, pre ktorý je $r \leq s - 2$. Na obrázku 13 je $s = 6$ a $r = 3$.



Obr. 13.

Posledné dve operácie sú navzájom inverzné: ak vykonáme najprv jednu z nich a potom druhú, dostaneme opäť východzí diagram. Odtiaľ dostávame, že v množine všetkých tých diagramov rozkladov čísla m, u ktorých je možné vykonať jednu z uvedených transformácií, je rovnaký počet diagramov s nepárnym počtom riadkov a diagramov s párnym počtom riadkov.

Treba nám však ukázať, ktoré diagramy nepripúšťajú uvedené transformácie. Je zrejmé, že tieto diagramy sa skladajú z jedného lichobežníka, pričom platí $s = r$ alebo $s = r + 1$. Poznamenávame, že sčítance v partíciách sú navzájom rôzne, Na obrázku 14(a) je $s = r = 3$, na obrázku 14(b) je $s = r + 1 = 4$.



(a) (b)

Obr. 14.

Spočítajme počet bodov z obrázku 14(a) a počet bodov z obrázku 14(b). V prípade (a) vo všeobecnosti dostávame

$$r + (r+1) + (r+2) + \cdots + (r + r - 1) = r^2 + \frac{r(r+1)}{2} = \frac{3r^2 - r}{2}$$

V prípade (b) vo všeobecnosti dostaneme

$$(r+1) + (r+2) + \cdots + (r + r) = r^2 + \frac{r(r+1)}{2} = \frac{3r^2 + r}{2}$$

Zhrnutie: Ak prirodzené číslo m nie je tvaru $\frac{3r^2 \pm r}{2}$, tak počty rozkladov (partícií) čísla m na párny počet rôznych sčítancov a nepárny počet rôznych sčítancov sú rovnaké. Ak je číslo r párne a $m = \frac{3r^2 \pm r}{2}$, tak zostane jeden diagram nepripúšťajúci uvedené transformácie a obsahuje párny počet sčítancov — riadkov. Preto je rozkladov na párny počet sčítancov o jeden viac než rozkladov na nepárny počet sčítancov. Ak je r číslo nepárne a $m = \frac{3r^2 \pm r}{2}$, tak je rozkladov na nepárny počet sčítancov — riadkov o jeden viac než rozkladov na párny počet sčítancov.

Tým je naša veta dokázaná.

KAPITOLA 2

Kombinatoricko-logický aparát

V tejto kapitole opíšeme charakteristické prístupy, ktoré tvoria základ kombinatorických dôkazov.

2.1. Princíp zapojenia a vypojenia

Základná veta, ktorú dokážeme v tejto časti, je zovšeobecnenie očividnej formuly $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, ktorá platí pre ľubovoľné konečné množiny A, B.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \\ - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Obr. 1. Jednoduché špeciálne prípady princípu zapojenia a vypojenia.

Predpokladajme, že sú dané podmnožiny $A_1, \ldots, A_n$ (nie nutne rôzne) niektorej konečnej množiny X. Máme určiť mohutnosť ich zjednotenia $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Za prvé „priblíženie" tejto mohutnosti môžeme pokladať

$$|A_1| + \cdots + |A_n| \tag{1}$$

no jednako toto číslo bude vo všeobecnom prípade trochu veľké, pretože ak $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, tak elementy prieniku $A_i \cap A_j$ započítavame dvakrát. Skúsme zlepšiť situáciu odpočítaním od výrazu (1) súčtu

$$\sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \tag{2}$$

V takom prípade dostaneme príliš malé číslo, pretože ak $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \emptyset$, tak elementy prieniku $A_i \cap A_j \cap A_k$ počítame v (2) trikrát. Nasledujúcim krokom môže byť pridanie súčtu

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \tag{3}$$

no z tej istej príčiny ako v predchádzajúcom prípade dostávame príliš veľké číslo. Napriek tomu sa ukazuje, že po n krokoch dostávame správny výsledok. To znamená, že platí nasledujúca veta.

Veta 2.1. Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú konečné množiny. Pre $k = 1, \ldots, n$ položme

$$S_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

kde sumačný symbol sa vzťahuje na všetky k-prvkové podmnožiny $\{i_1, \ldots, i_k\}$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Potom

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k \qquad (4)$$

Dôkaz: Pre každé $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$, nech J_x je množina všetkých tých $j \in \{1, \ldots, n\}$, pre ktoré $x \in A_j$. Položme $|J_x| = m$. Potom je prvok x započítaný m-krát v súčte S_1, $\binom{m}{2}$-krát v súčte S_2 a všeobecne, v súčte S_k, je započítaný $\binom{m}{k}$-krát. Odtiaľ vyplýva, že v súčte $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} S_k$ je x započítaný s násobnosťou:

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \binom{m}{i} = 1 - 1 + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \binom{m}{i} = 1 - \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i} \binom{m}{i} = (1 - (1-1)^m) = 1 \quad \square$$

Uvedieme ešte ďalšie dôkazy vety 2.1 matematickou indukciou.

Dôkaz: Pre $n = 1$ je tvrdenie vety zrejmé, tak isto, ako aj pre $n = 2$ v prípade, že množiny A_1 a A_2 sú disjunktné. Všeobecne platí

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2 \setminus A_1|$$
$$|A_2 \setminus A_1| = |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

a teda $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Týmto je veta dokázaná pre $n = 2$. Nech teraz $n \geq 2$. Podobne platí:

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big| = \Big|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big| + |A_{n+1}| - \Big|\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \cap A_{n+1}\Big|$$

Ak predpokladáme, že veta platí pre n množín, tak použitím tohoto predpokladu na množiny $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ a $(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})$, dostávame

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}| = |A_1| + \cdots + |A_{n+1}| - |A_1 \cap A_2| - \cdots - |A_1 \cap A_{n+1}| - \cdots -$$
$$- |A_n \cap A_{n+1}| + \cdots + (-1)^{n+2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} S_k$$

čo je tvrdenie pre $n + 1$ množín. Poznamenávame, že v dôkaze sme využívali identickú rovnosť:

$$\Big|\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \cap A_{n+1}\Big| = \Big|\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\Big| \quad \square$$

Dôkaz: Teraz urobíme dôkaz matematickou indoukciou podľa počtu prvkov množiny $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Ak $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ má jeden prvok, tak tento patrí do m množín $m \geq 1$. Môžeme predpokladať, že sú to množiny $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Potom $|A_i \cap A_j| = 1$, pre $i, j \leq m$ a je to nula pre ostatné i, j. Podobne pre viac indexov. Teda pravá strana rovnice (4) sa rovná

$$m - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots + (-1)^{m+1} \binom{m}{m} = 1 - 1 + m - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m+1} \binom{m}{m} =$$
$$= 1 - \left(1 - m + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \cdots + (-1)^m \binom{m}{m}\right) = 1 - (1-1)^m = 1$$

t.j. v tomto prípade platí (4). Predpokladajme, že (4) platí pre ľubovoľné množiny $A_1, \ldots, A_n$ také, že $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ má a prvkov. Nech $M_1, \ldots, M_n$ sú také, že $\bigcup_{k=1}^{n} M_k$ má $a+1$ prvkov. Vezmime jeden pevný prvok $x \in \bigcup_{k=1}^{n} M_k$ a položme $A_k = M_k \setminus \{x\}$. Prvok x patrí do l množín z n-tice $M_1, \ldots, M_n$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x \in M_1, \ldots, x \in M_l$. Potom

$M_i = A_i$ pre $i > l$. Ľahko vidno, že platí:

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k| + l = \sum_{k=1}^{n} |M_k|$$

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le l} |M_{i_1} \cap M_{i_2}| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le l} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \binom{l}{2}$$

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le l} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap M_{i_3}| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le l} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \binom{l}{3}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_l \le l} |M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_l}| = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_l \le l} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}| + \binom{l}{l}$$

Pre $k > l$ už platí rovnosť:

$$\sum_{l < i_1 < \cdots < i_k \le n} |M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k}| = \sum_{l < i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

Teda podľa indukčného predpokladu

$$|\bigcup_{k=1}^{n} M_k| = |\bigcup_{k=1}^{n} A_k| + 1 = \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{1 \le k_1 < k_2 \le n} |A_{k_1} \cap A_{k_2}| + \cdots +$$

$$+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n| + 1 = \sum_{k=1}^{n} |M_k| - \sum_{1 \le k_1 < k_2 \le n} |M_{k_1} \cap M_{k_2}| + \cdots +$$

$$+ (-1)^{n+1} |M_1 \cap \ldots \cap M_n| + 1 - l + \binom{l}{2} - \cdots + (-1)^l \binom{l}{l}$$

Podľa binomickej vety platí $1 - l + \binom{l}{2} - \cdots + (-1)^l \binom{l}{l} = (1-1)^l = 0$, odkiaľ už vyplýva dokazované tvrdenie. $\square$

Uvedieme teraz ekvivalentnú formuláciu horeuvedenej úlohy. Nech A je konečná množina a $A_1, \ldots, A_n$ súbor jej neprázdnych podmnožín. Často treba určiť mohutnosť komplementu zjednotenia tohoto súboru vzhľadom na množinu A. Teda máme určiť veľkosť rozdielu $|A| - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$. Položme $|A| = S_0$. Potom

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k \tag{5}$$

Dôkaz: Formulu (5) dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na n. Zrejme platí $|A_1^c| = |A| - |A_1|$, teda tvrdenie je správne pre $n = 1$. Predpokladajme, že pre ľubovoľné $n \ge 1$ platí

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k$$

dokážeme, že tvrdenie platí aj pre $n+1$. Skôr než prejdeme k dôkazu tohoto faktu, poznamenávame, že rovnosť $|A_1^c| = |A| - |A_1|$ môžeme aplikovať na ľubovoľnú množinu určenú zodpovedajúcim spôsobom. Potom v dôsledku uvedenej poznámky platí

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1})^c| = |(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c| - |(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c \cap A_{n+1}|$$

Podľa indukčného predpokladu platí $|(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k$. Pre komplement zjednotenia $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ vzhľadom na množinu A_{n+1} ďalej platí:

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c \cap A_{n+1}| = |A_{n+1}| - |A_1 \cap A_{n+1}| - |A_2 \cap A_{n+1}| - \cdots - |A_n \cap A_{n+1}| +$$

$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_{n+1}| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}|$$

Ak odpočítame poslednú rovnosť od predchádzajúcej, dostávame rovnosť (5) pre $A_1, \dots, A_{n+1}$, t.j. $|(A_1 \cup \dots \cup A_{n+1})^c| = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k S_k$. □

Príklad 2.2. Zistite počet tých prirodzených čísel, ktoré sú menšie ako 210 a sú nesúdeliteľné s číslom 210.

Riešenie: Kanonický rozklad čísla 210 je $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Teda každé číslo súdeliteľné s číslom 210 musí byť deliteľné aspoň jedným z prvočísel 2, 3, 5, 7. Objektami tu budú prirodzené čísla $n \le 210$. Budeme hovoriť, že číslo n patrí do množiny A_1 (resp. A_2, A_3, A_4), ak je deliteľné dvoma (resp. 3, 5, 7).

Dvoma je deliteľné každé druhé číslo, preto existuje $\frac{210}{2} = 105$ čísel deliteľných dvoma a nepresahujúcich číslo 210, čiže $|A_1| = 105$, analogicky $|A_2| = 70$, $|A_3| = 42$, $|A_4| = 30$.

Je známym faktom z teórie čísel, že nejaké číslo je deliteľné súčasne viacerými prvočíslami práve vtedy, ak je deliteľné ich súčinom. Pomocou neho už ľahko odvodíme, že $|A_1 \cap A_2| = 35$, $|A_1 \cap A_3| = 21$, $|A_1 \cap A_4| = 15$, $|A_2 \cap A_3| = 14$, $|A_2 \cap A_4| = 10$, $|A_3 \cap A_4| = 6$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 7$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 5$, $|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 3$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$. Teda $|A| - |A_1 \cup \dots \cup A_4| = 48 = 210 - (105+70+42+30) + (35+21+15+14+10+6) - (7+5+3+2) + 1$.

Príklad 2.3. Koľko existuje bijekcií f n-prvkovej množiny na seba (t.j. permutácií n-prvkovej množiny) takých, že neexistujú identické prvky, t.j. $f(i) \neq i$ pre $i = 1, \dots, n$?

Riešenie: Položme $S_0 = n!$, $S_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$. Platí, že

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

t.j. ide o počet permutácií, pri ktorých sa i_j zobrazí na i_j pre $j = 1, \dots, k$; teda

$$S_k = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

Príklad 2.4. Eulerova funkcia ϕ je v teórii čísel definovaná takto: $\phi(n)$ je počet prirodzených čísel menších ako n a nesúdeliteľných s číslom n. Ukážeme, že ak $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1, \dots, p_k$ sú prvočísla, tak

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Riešenie: Označme

$$A_i = \{l \in \mathbb{N} \mid 1 < l \le n,\ p_i | l\}$$

Potom $\phi(n)$ je počet prvkov množiny $\{1, 2, \dots, n\} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)$. Zrejme platí

$$A_i = \left\{p_i, 2p_i, \dots, \frac{n \cdot p_i}{p_i}\right\}, \text{ t.j. } |A_i| = \frac{n}{p_i}$$

Obdobne $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$, $i \neq j$, atď., množina $A_1 \cap \ldots \cap A_k$ má $\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$ prvkov. Podľa princípu zapojenia a vypojenia platí:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{k} \frac{n}{p_i p_j} + \sum_{\substack{i \neq j \neq r \\ i \neq r}}^{k} \frac{n}{p_i p_j p_r} + \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k}$$

$$\phi(n) = n - |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{k} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{\substack{i \neq j \\ j \neq r \\ i \neq r}} \frac{n}{p_i p_j p_r} + \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k} =$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Veta 2.5. Nech S_B^A je množina všetkých surjektívnych zobrazení z A do B. Ak $|A| = m$ a $|B| = n$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, tak

$$\left|S_B^A\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

Dôkaz: Označme M_j množinu všetkých zobrazení $f\colon A \to B$, pre ktoré b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ nie je obrazom žiadneho prvku množiny A. Teda $b_j \in B \setminus f(A) \neq \emptyset$. Potom $|M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_k}| = (n-k)^m$, pričom $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Teda

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^m$$

Ak berieme do úvahy, že počet všetkých zobrazení z množiny A do množiny B je rovný n^m, tak $|S_B^A| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$. □

Príklad 2.6. Zistite počet rozkladov konečnej množiny M s m prvkami na n častí (t.j. každá z častí je neprázdna a zjednotenie všetkých n častí nám dáva množinu M, pričom jednotlivé časti rozkladu sú po dvoch disjunktné; poznamenávame, že poradie častí neberieme do úvahy).

Riešenie: Všimnime si, že každé surjektívne zobrazenie z m-prvkovej množiny na n-prvkovú množinu určuje jednoznačne neusporiadaný rozklad m-prvkovej množiny na n častí. Obrátene, ak vezmeme neusporiadaný rozklad m-prvkovej množiny na n častí, určuje $n!$ surjektívnych zobrazení z m-prvkovej množiny na n-prvkovú. Teda počet neusporiadných rozkladov m-prvkovej množiny na n častí je rovný

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

Teraz dokážeme niektoré zovšeobecnenia formúl (4) a (5). Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú konečné množiny, nech $A(r)$ označuje počet prvkov, ktoré sa nachádzajú v práve r množinách a $A'(r)$ označuje počet prvkov, ktoré sa vyskytujú v aspoň r množinách. Hodnoty uvedených počtov nám určujú nasledujúce dve vety.

Veta 2.7.

$$A(r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k, \quad r = 0, \ldots, n. \tag{6}$$

Dôkaz: Ukážeme, že v pravej časti rovnosti (6) sa vyskytujú všetky prvky, ktoré sú obsiahnuté v práve r množinách. Prvky, ktoré sa vyskytujú v práve r množinách prispievajú raz do súčtu v S_r a nevystupujú v ostatných súčtoch $S_{r+1}, \ldots, S_n$. Prvky, ktoré vystupujú v $m > r$ množinách v súčte S_k, $k > r$ dávajú vklad $\binom{m}{k}$. Preto celkový vklad takýchto prvkov do pravej časti rovnosti je rovný:

$$\sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{m}{k} = \binom{m}{r} \sum_{j=0}^{m-r} (-1)^j \binom{m-r}{j} = 0$$

Prvky, ktoré sa vyskytujú v $m < r$ množinách do pravej časti rovnosti (6) nedávajú žiadny vklad. Tým je formula dokázaná pre $r = 0, \ldots, n$. □

Veta 2.8.

$$A'(r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k, \quad r = 1, \ldots, n.$$

Dôkaz: Platí, že

$$A'(r) = \sum_{j=r}^{n} A(j) = \sum_{j=r}^{n} \sum_{l=j}^{n} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} S_l =$$

$$= \sum_{j=r}^{n} S_j - \binom{j+1}{j} S_{j+1} + \cdots + (-1)^{k-j} \binom{k}{j} S_k + \cdots + (-1)^{n-j} \binom{n}{j} S_n =$$

$$= S_r - \binom{r+1}{r} S_{r+1} + \cdots + (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k + \cdots + (-1)^{n-r} \binom{n}{r} S_n +$$

$$+ S_{r+1} - \binom{r+2}{r+1} S_{r+2} + \cdots + (-1)^{k-(r+1)} \binom{k}{r+1} S_k + \cdots + (-1)^{n-(r+1)} \binom{n}{r+1} S_n +$$

$$+ S_{r+2} - \binom{r+3}{r+2} S_{r+3} + \cdots + (-1)^{k-(r+2)} \binom{k}{r+2} S_k + \cdots + (-1)^{n-(r+2)} \binom{n}{r+2} S_n +$$

$$\vdots$$

$$S_{r+m} - \binom{r+m+1}{r+m} S_{r+m+1} + \cdots + (-1)^{k-(r+m)} \binom{k}{r+m} S_k + \cdots + (-1)^{n-(r+m)} \binom{n}{r+m} S_n +$$

$$\vdots$$

$$+ S_n = \sum_{k=r}^{n} S_k \sum_{j=r}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j}$$

V poslednej formule zavedením substitúcie $k - j = i$ dostávame:

$$\sum_{k=r}^{n} S_k \sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i \binom{k}{k-i} = \sum_{k=r}^{n} S_k \sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i \binom{k}{i}$$

Počítajme, čomu sa rovná

$$\sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i \binom{k}{i} = \sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i \left[\binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1} \right] = (-1)^{k-r} \binom{k-1}{k-r} = (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1}$$

a teda

$$A'(r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k$$

Príklad 2.9. Nech $E(m,n,r)$ označuje počet spôsobov rozdelenia m rôznych predmetov do n rôznych krabičiek, pri ktorých je práve r krabičiek prázdnych a $F(m,n,r)$ počet tých rozdelení, pri ktorých aspoň r krabičiek zostáva prázdnych. Určte $E(m,n,r)$ a $F(m,n,r)$.

Riešenie: Najprv určime $E(m,n,0)$, v tomto prípade ide vlastne o surjektívne zobrazenia m-prvkovej množiny na n-prvkovú, teda $E(m,n,0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$ pre $m \geq n$.

V prípade, že $r \neq 0$ môžeme úlohu previesť na predchádzajúcu tak, že najprv určíme prázdne krabičky, to môžeme urobiť $\binom{n}{r}$ spôsobmi, ďalej riešime úlohu rozmiestniť m rôznych predmetov do $n - r$ rôznych krabičiek tak, že žiadna krabička nie je prázdna, t.j. $E(m, n-r, 0) = \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} (n-r-j)^m$, a teda

$$E(m,n,r) = \binom{n}{r} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} (n-r-j)^m$$

V prípade $r \neq 0$ môžeme postupovať pri riešení aj tak, že použijeme vetu 2.7: Označme A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ množinu tých rozdelení m rôznych predmetov do n rôznych krabičiek, pri ktorých je i-ta krabička prázdna. $|A_i| = (n-1)^m$ pre $i = 1, \dots, n$. $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m$ pre $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$,

$$S_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k}(n-k)^m$$

Podľa vety 2.7

$$A(r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{n}{k}\binom{k}{r}(n-k)^m = \binom{n}{r}\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{n-r}{k-r}(n-k)^m =$$
$$= \binom{n}{r}\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}(n-r-j)^m$$

Obdobne v prípade určenia $F(m,n,r)$ použijeme vetu 2.8. Dostávame:

$$F(m,n,r) = \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k-1}{r-1}\binom{n}{k}(n-k)^m =$$
$$\binom{n}{k}\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{n-r}{k-r}(n-k)^m\frac{r}{k} = \binom{n}{r}\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}(n-r-j)^m\frac{r}{r+j}$$

Bonferroniho nerovnosti

Uvažujme zovšeobecnené formuly princípu zapojenia a vypojenia. Odvodíme nerovnosti, ktoré v mnohých prípadoch zjednodušujú použitie princípu zapojenia a vypojenia, pretože v rámci prípustnej presnosti umožňujú obmedziť sa v súčte (6) so striedavými znamienkami na vypočítanie len niekoľkých členov.

Z formuly (6) pre $r + 1 \le d \le n$ dostávame:

$$A(r) - \sum_{k=r}^{d-1}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k = (-1)^{d-r}U(d,r) \tag{7}$$

kde

$$U(d,r) = \sum_{k=d}^{n}(-1)^{k-d}\binom{k}{r}S_k \tag{8}$$

Najprv nájdeme inverznú formulu k (6) tak, že vyjadríme veličiny S_k pre $k = 0, 1, \dots, n$ pomocou veličiny $A(r)$ pre $r = 0, 1, \dots, n$. Vynásobíme obidve strany rovnosti (6) číslom $\binom{r}{k}$ a spočítame získané výrazy podľa r od k do n, dostávame:

$$\sum_{r=k}^{n}\binom{r}{k}A(r) = \sum_{j=k}^{n}S_j\sum_{r=k}^{j}(-1)^{j-r}\binom{r}{k}\binom{j}{r} \tag{9}$$

Ak vyjadríme binomické koeficienty pomocou faktoriálov, ľahko dostávame:

$$\sum_{r=k}^{j}(-1)^{j-r}\binom{r}{k}\binom{j}{r} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j > k \end{cases}$$

Ak použijeme túto rovnosť, z rovnosti (9) dostávame formulu inverznú k formule $A(r)$:

$$S_k = \sum_{r=k}^{n}\binom{r}{k}A(r), \quad k = 0, 1, \dots, n \tag{10}$$

Výraz S_k z formuly (10) dosadíme do formuly (8), zmeníme poradie súčtu a dostávame:

$$U(d,r) = \sum_{l=d}^{n}A(l)\sum_{k=d}^{l}(-1)^{k-d}\binom{k}{r}\binom{l}{k}$$

Poznamenávame, že

$$\sum_{k=d}^{l}(-1)^{k-d}\binom{k}{r}\binom{l}{k} = \binom{l}{r}\sum_{j=0}^{l-d}(-1)^{l-j-d}\binom{l-r}{j}$$

Pretože

$$\sum_{j=0}^{l-d}(-1)^{l-j-d}\binom{l-r}{j} = \operatorname{coef}_{x^{l-d}}(1+x)^{-1}(1+x)^{l-r} = \binom{l-r-1}{l-d}$$

tak nakoniec dostávame:

$$U(d,r) = \sum_{l=d}^{n}\binom{l}{r}\binom{l-r-1}{d-r-1}A(l) \geq 0$$

Ak berieme do úvahy túto nerovnosť, zo vzťahu (7) dostávame

$$A(r) - \sum_{k=r}^{r+2\nu-1}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k = (-1)^{2\nu}U(r+2\nu,r) \geq 0$$

$$A(r) - \sum_{k=r}^{r+2\nu}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k = (-1)^{2\nu+1}U(r+2\nu+1,r) \leq 0$$

Z týchto dvoch vzťahov vyplývajú takzvané Bonferroniho nerovnosti:

$$\sum_{k=r}^{r+2\nu-1}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k \leq A(r) \leq \sum_{k=r}^{r+2\nu}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k \tag{11}$$

kde $0 \leq \nu \leq \frac{(n-r)}{2}$. Bonferroniho nerovnosti sú ekvivalentné nerovnostiam

$$\begin{aligned} A(r) - \sum_{k=r}^{r+2\nu}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k &\geq -\binom{r+2\nu+1}{r}S_{r+2\nu+1} \\ A(r) - \sum_{k=r}^{r+2\nu-1}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k &\leq \binom{r+2\nu}{r}S_{r+2\nu} \end{aligned} \tag{12}$$

Poznámka 2.10. Inými slovami sa to dá povedať takto: Ak vynecháme v súčte (6) vyčísľujúcom $A(r)$ postupne niektoré sčítance, tak urobíme chybu, znamienko ktorej je totožné so znamienkom prvého z vynechaných sčítancov a absolútna hodnota chyby nie je väčšia ako absolútna hodnota prvého z vynechaných sčítancov.

2.2. Spernerova veta

Uvažujme n-prvkovú množinu A a systém $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ jej rôznych podmnožín; $A_i \subseteq A$ pre $1 \leq i \leq m$. Dokážeme nasledujúcu vetu:

Veta 2.11. Nech A je konečná množina o n prvkoch, $A_1, \ldots, A_m$ sú jej neprázdne konečné podmnožiny, také, že $A_i \not\subseteq A_j$ pre $i \neq j$, t.j. A_i nie je podmnožinou A_j, pre $i, j = 1, \ldots, n$. Potom platí nerovnosť:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1$$

Dôkaz: Reťazec podmnožín $C_0, C_1, \ldots, C_n$, $C_i \subseteq A$, $|C_i| = i$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ takých, že $\emptyset = C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq \cdots \subsetneq C_n = A$ nazývame *nasýtený reťazec*. Medzi jeho prvky totiž nemôžeme dať doplňujúcu množinu. Ak máme n-prvkovú konečnú množinu A, tak je zrejmé, že počet nasýtených reťazcov v A je $n!$

Uvažujme teraz nasýtené reťazce, ktoré prechádzajú podmnožinou A_i $(1 \leq i \leq m)$. Pre $|A_i| = r$ to budú reťazce tvaru $C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq \cdots \subsetneq C_{r-1} \subsetneq A_r \subsetneq C_{r+1} \subsetneq \cdots \subsetneq C_n$. Počet podreťazcov

$C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq \cdots \subsetneq C_{r-1}$ je rovný $|A_i|! = r!$ a počet podreťazcov $C_{r+1} \subsetneq \cdots \subsetneq C_n$ je rovný $(n - |A_i|)! = (n-r)!$ To znamená, že celkový počet nasýtených reťazcov, ktoré prechádzajú cez A_i, je rovný $|A_i|!\,(n-|A_i|)!$ Ľahko možno nahliadnuť, že pre $i \neq j$ nasýtené reťazce, ktoré prechádzajú cez A_i, resp. A_j, sú rôzne. Skutočne, ak A_i, A_j $(i \neq j)$ patria do jedného a toho istého reťazca, potom nájdeme také elementy C_k a C_l, že $C_k = A_i$, $C_l = A_j$. Ak podľa definície kladieme $C_k \subseteq C_l$, dostávame $A_i \subseteq A_j$, čo je v spore s predpokladom vety. Spočítajme teda, koľko je nasýtených reťazcov, ktoré prechádzajú cez množiny A_i $(i = 1, \ldots, m)$; ich celkový počet neprevyšuje $n!$, t.j. počet všetkých možných nasýtených reťazcov v n-prvkovej množine. Dostávame teda

$$\sum_{i=1}^{m} |A_i|(n - |A_i|)! \leq n!$$

a odtiaľ požadovanú nerovnosť. $\square$

Veta 2.12 (Spernerova). Nech A je konečná množina o n prvkoch a $A_1, \ldots, A_m$ sú jej neprázdne konečné podmnožiny, ktoré navzájom do seba nezapadajú, t.j. $A_i \not\subseteq A_j$ pre $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, m$. Potom

$$m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Dôkaz: Uvažujme nerovnosť

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} = \frac{1}{\binom{n}{|A_1|}} + \frac{1}{\binom{n}{|A_2|}} + \cdots + \frac{1}{\binom{n}{|A_m|}} \leq 1$$

Ak nahradíme každého z menovateľov väčším, celková nerovnosť sa zachová. Vieme, že platí

$$\binom{n}{|A_i|} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \text{ pre } i = 1, \ldots, m$$

Dostávame teda, že

$$\frac{m}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq 1 \qquad m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad \square$$

Príklad 2.13. Je známe, že každé celé kladné číslo $n > 1$ má jediné vyjadrenie tvaru

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \qquad 1 < p_1 < \cdots < p_r$$

kde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sú prvočísla. Toto vyjadrenie nazývame *kanonickým rozkladom* n. Ak d je deliteľ n, tak píšeme $d|n$ a d musí mať vyjadrenie

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r} \quad \beta_i \leq \alpha_i \text{ pre } 1 \leq i \leq r$$

Nech kanonický rozklad čísla n má tvar $n = p_1 p_2 \ldots p_r$ a m je maximálny počet deliteľov čísla n, ktoré nedelia jeden druhého. Dokážeme, že $m \leq \binom{r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}$.

Riešenie: Vezmime $X = \{1, 2, \ldots, r\}$. Každému deliteľovi tvaru $p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_s}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq r)$ priradíme podmnožinu $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ množiny X. Dostaneme systém podmnožín $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$. Pretože delitelia nedelia jeden druhého, tak $A_i \not\subseteq A_j$ $(i \neq j)$, a teda tvrdenie vyplýva zo Spernerovej vety.

Príklad 2.14. Nech $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ a nech $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Označme $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \iff \alpha_i \leq \beta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Aký je maximálny počet n-rozmerných vektorov, z ktorých žiadne dva nie sú porovnateľné?

Riešenie: Nech $A \subseteq X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Množine A priradíme jednoznačne vektor $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ takto:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{ak } i \in A \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

Ak $\tilde{\alpha}$ nie je porovnateľný s $\tilde{\beta}$, tak pre priradené množiny A, B platí $A \nsubseteq B \wedge B \nsubseteq A$, t.j. podľa Spernerovej vety existuje najviac $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ neporovnateľných vektorov.

2.3. Dirichletov princíp

Veta 2.15. Nech X, Y sú konečné množiny a f je zobrazenie množiny X do množiny Y. Ak $|X| > |Y|$, tak existuje také $y \in Y$, že aspoň pre dva rôzne prvky $x_1, x_2 \in X$ platí $f(x_1) = f(x_2) = y$.

Dôkaz: Tvrdenie vety je len logická obmena definície rovnakej mohutnosti. Keby pre každé $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ bolo $f(x_1) \neq f(x_2)$, tak f je prosté zobrazenie množiny X do množiny Y, teda $|X| \leq |Y|$, čo je v spore s predpokladom $|X| > |Y|$. $\square$

Príklad 2.16. Použitím Dirichletovho princípu ukážeme, že v Prahe žijú dvaja ľudia s rovnakým počtom vlasov na hlave. Každému obyvateľovi x mesta Prahy priradíme číslo $f(x)$ — počet jeho vlasov na hlave. Keďže množina všetkých obyvateľov Prahy má aspoň milón prvkov a hodnota funkcie f neprevyšuje 500000, tak podľa Dirichletovho princípu existujú dvaja obyvatelia Prahy x_1, x_2 takí, že $f(x_1) = f(x_2)$, t.j. majú rovnaký počet vlasov na hlave.

Príklad 2.17. Nech n, m sú nesúdeliteľné prirodzené čísla väčšie ako 1. Ukážeme, že existuje také prirodzené číslo k, že m^k pri delení číslom n dáva zvyšok 1.

Riešenie: Uvažujme čísla $m^1, m^2, \ldots, m^{n+1}$. Označme r_i zvyšok pri delení čísla m^i číslom n. Čísla $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ sú menšie ako n, je ich $n+1$, teda aspoň dve sa rovnajú, t.j. existujú $i, j \leq n+1$ také, že $r_i = r_j$. Nech $i < j$. Potom číslo $m^j - m^i$ je deliteľné číslom n. Keďže čísla n a m^i sú nesúdeliteľné, tak n delí $m^{j-i} - 1$, lebo $m^j - m^i = m^i(m^{j-i} - 1)$. Stačí teda položiť $k = j - i$.

Veta 2.18. Nech f je zobrazenie množiny X do množiny Y. Nech λ označuje nejakú mohutnosť ($\lambda = n \in \mathbb{N}^+$). Ak $\lambda|Y| < |X|$, tak existuje $y \in Y$ také, že množina $\{x \in X \mid f(x) = y\}$ má mohutnosť väčšiu ako λ.

Dôkaz: Označme $A_y = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Potom $X = \bigcup_{y \in Y} A_y$ a pre $y_1 \neq y_2$ je $A_{y_1} \cap A_{y_2} = \emptyset$. Keby pre každé $y \in Y$ platilo $|A_y| \leq \lambda$, tak potom $|X| = |\bigcup_{y \in X} A_y| \leq \lambda|Y| < |X|$, čo ale nie je možné. Teda existuje $y \in Y$ také, že $A_y = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ má mohutnosť väčšiu ako λ. $\square$

Dôsledok 2.19. Nech f je zobrazenie množiny X do množiny Y. Nech $|X| = m$, $|Y| = n$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Ak $nk < m$, tak existuje $y \in Y$ také, že množina $\{x \in X \mid f(x) = y\}$ má aspoň $k+1$ prvkov.

Dôkaz: Stačí si uvedomiť, že ak nie je pravda $|A_y| \leq k$, tak $|A_y| \geq k+1$ (pre k prirodzené) a použiť predchádzajúcu vetu.

$$X = \bigcup_{y \in Y} A_y \qquad |X| = \Big|\bigcup_{y \in Y} A_y\Big| = \sum_{y \in Y} |A_y| \leq kn < m \quad \square$$

Dôsledok 2.20. Nech f je zobrazenie z množiny X do Y. V prípade, že množina X je nekonečná a množina Y konečná, tak existuje také $y \in Y$, že $A_y = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ je nekonečná množina.

Dôkaz: Tak, ako v predchádzajúcich prípadoch, dostávame pre množinu X:

$$X = \bigcup_{y \in Y} A_y \qquad |X| = \Big|\bigcup_{y \in Y} A_y\Big| \leq nk_0$$

kde $|Y| = n$ a $k_0 = \max_{y \in Y} |A_y|$; k_0 existuje na základe princípu maxima, ktorý hovorí, že každá neprázdna konečná podmnožina čiastočne usporiadanej množiny má minimálny a maximálny prvok. Teda $|X| \leq nk_0$, čo je spor s tým, že X je nekonečná množina. $\square$

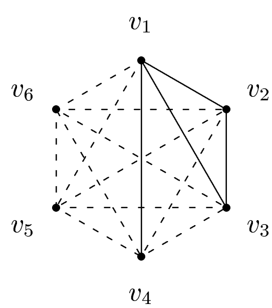
Príklad 2.21. Nech M je množina slov dĺžky n v abecede $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ($k \geq 2$). Každé dve rôzne slová množiny M sa líšia v aspoň dvoch písmenách. Aká je mohutnosť množiny M ?

Riešenie: Matematickou indukciou ukážeme, že pre $n \geq 2$ je $|M| \leq k^{n-1}$. Nech najprv $n = 2$. Množinu M rozdelíme na k podmnožín $M_1, M_2, \ldots, M_k$ tak, že do množiny M_i dáme tie slová z množiny M, ktoré začínajú písmenom a_i. Keby bolo $|M| > k$, tak v niektorej množine M_i sú dve slová množiny M — tie sa však líšia len v druhom písmene, čo nie je možné. Teda $|M| \leq k$.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n-1$ a ukážeme, že platí aj pre n, kde $n-1 \geq 2$. Rozdelíme množinu M opäť na k častí $M_1, M_2, \dots, M_k$ podľa toho, akým písmenom začína dané slovo. Keby bolo $|M| > k^{n-1}$, tak podľa dôsledku 2.19 existuje také i, že $|M_i| > k^{n-2}$. Keďže $|M_1| + |M_2| + \cdots + |M_k| > k^{n-1}$, nemôžu byť všetky $|M_i| \leq k^{n-2}$. Nech $\mathcal{M}$ je množina slov, ktoré vzniknú zo slov množiny M_i vynechaním prvého písmena. Množina $\mathcal{M}$ obsahuje slová dĺžky $n-1$ a každé dve sa líšia aspoň v dvoch písmenách. Teda podľa indukčného predpokladu je $|\mathcal{M}| \leq k^{n-2}$, čo je hľadaný spor.

Cvičenie 2.22. Pokúste sa nájsť množinu M s uvedenými vlastnosťami mohutnosti k^{n-1}.

Príklad 2.23. Majme komplentný graf o 6 vrcholoch. Ukážte, že pri každom farbení hrán grafu dvoma farbami dostaneme vždy trojuholník, ktorý je zafarbený jednou farbou.

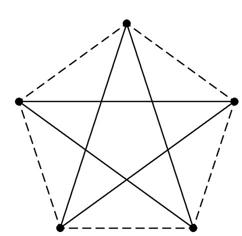


OBR. 2. Obrázok k príkladu 2.23

Riešenie: Uvažujme kompletný graf o 6 vrcholoch; z ľubovoľného jeho vrchola vychádza 5 hrán. Zvoľme si ľubovoľne, ale pevne napríklad vrchol v_1. Podľa dôsledku 2.19 pri ľubovoľnom zafarbení hrán kompletného grafu o 6 vrcholoch dvomi farbami vychádzajú z vrchola v_1 aspoň tri hrany zafarbené tou istou farbou (farbíme dvoma farbami: červenou a modrou). Nech ide o červenú farbu a nech sú to hrany $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$ a $\{v_1, v_4\}$. Všimnime si teraz trojicu vrcholov v_2, v_3, v_4: Ak niektorá z hrán $\{v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_4\}$ je zafarbená červenou farbou — nech je to napríklad hrana $\{v_2, v_3\}$, tak dostaneme jednofarebný trojuholník $\{v_1, v_2, v_3\}$. Ak sú všetky tri hrany modré, tak dostávame modrý trojuholník $\{v_2, v_3, v_4\}$.

Príklad 2.24. Ukážte, že kompletný graf o 5 vrcholoch možno zafarbiť dvoma farbami tak, že neexistuje jednofarebný trojuholník.

Riešenie: je na obrázku 3.



OBR. 3. Zafarbenie k príkladu 2.24

Poznámka 2.25. Z uvedených príkladov môžeme robiť nasledujúci záver: Pre každé $n \geq 6$, ak farbíme kompletný graf o n vrcholoch, tak vždy dostaneme jednofarebný trojuholník.

Cvičenie 2.26. Ukážte, že ak v prípade kompletného grafu o 5 vrcholoch farbením hrán dvoma farbami nevznikne jednofarebný trojuholník, tak potom 5 hrán grafu je zafarbených jednou farbou a päť hrán grafu je zafarbených druhou farbou.

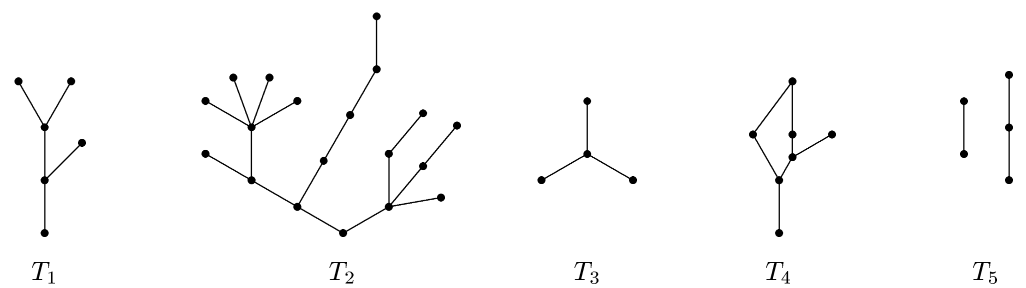
2.4. Königova lema

Definícia 2.27. Čiastočne usporiadaná množina $(T, \leq)$ sa nazýva *strom*, ak pre každé $n \in T$ je *úsek* $T(n) = \{v \in T \mid v < n\}$ dobre usporiadaná množina a T má najmenší prvok (koreň).

Poznámka 2.28. Čiastočne usporiadaná množina je *dobre usporiadaná množina*, ak jej ľubovoľná neprázdna podmnožina má najmenší prvok. Ľahko možno nahliadnuť, že dobre usporiadaná množine je aj lineárne usporiadaná. Stačí ukázať, že ľubovoľné prvky a, b sú v relácii, ale to je pravda, pretože $\{a, b\}$ má najmenší prvok.

Ku každému stromu môžeme priradiť diagram, ktorý taktiež nazveme strom; je to geometrická reprezentácia matematického pojmu stromu s koreňom: Každému prvku $v \in T$ priradíme vrchol stromu T a znázorníme ho krúžkom. Dva vrcholy stromu T spojíme hranou práve vtedy, ak $v \leq u$ a neexistuje taký vrchol z, že platí $v \leq z \leq u$; hovoríme, že u je *bezprostredný nasledovník* v.

Stupeň vetvenia vrchola v je počet jeho bezprostredných nasledovníkov. *Výška* vrchola v je počet prvkov v úseku $T(v)$. Koreň má výšku 0. Maximálny lineárny reťazec v strome sa nazýva *vetva* stromu (maximálny v množinovom zmysle). Pod *dĺžkou* vetvy rozumieme počet vrcholov v reťazci. *Výška* stromu je suprémum výšok vrcholov stromu.



Obr. 4. T_1 a T_2 sú stromy, T_3, T_4 a T_5 nie sú stromy.

Príklad 2.29. Nech T je množina všetkých konečných postupností čísel $\{1, 2, \ldots, k\}$. Nech $a = \{a_j\}_{j=1}^{n}$, $b = \{b_j\}_{j=1}^{m}$ sú dve konečné postupnosti a $a \leq b \iff (n \leq m$ a $a_j = b_j$ pre $j = 1, \ldots, n)$, t.j. b je predĺženie postupnosti a. Potom T je strom, ktorého koreň je $\emptyset$. Stupeň vetvenia každého vrchola je k. Výška vrchola $a = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ je n lebo $T(a) = \{\emptyset, \{a_i\}_{i=1}^{1}, \ldots, \{a_i\}_{i=1}^{n-1}\}$.

Príklad 2.30. Uvažujme strom S všetkých konečných postupností čísel $\{1, 2, \ldots, k\}$ dĺžky menšej ako n. Strom S má stupeň vetvenia k, má $1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1}$ vrcholov a každá vetva má dĺžku n (pozri obrázok 5).

Príklad 2.31. Strom na obrázku 6 má výšku 1 a vrchol v_0 má stupeň vetvenia $\aleph_0$.

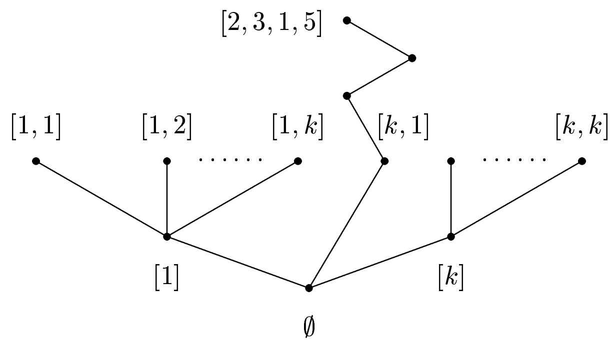
Príklad 2.32. Strom na obrázku 7 má výšku $\aleph_0$ a každá vetva je konečná. Vrchol v_0 má stupeň vetvenia $\aleph_0$, strom T má nekonečne veľa vrcholov.

Platí však takéto jednoduché tvrdenie:

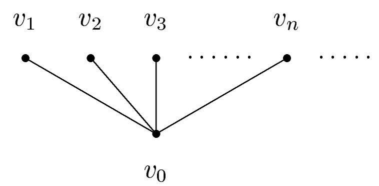
Lema 2.33 (Königova). Nech každý vrchol stromu s koreňom $(T, \leq)$ má konečný stupeň vetvenia. Ak T je nekonečná množina, tak v T existuje nekonečne dlhá vetva.

Dôkaz: Pre každý vrchol $v \in T$ označíme

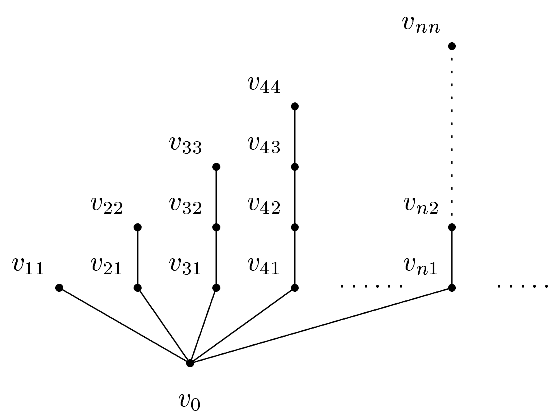
$$A_v = \{u \in T \mid v < u\}$$



Obr. 5. Strom k príkladu 2.30



Obr. 6. Strom k príkladu 2.31



Obr. 7. Strom k príkladu 2.32

t.j. A_v je množina tých vrcholov stromu T, ktoré „ležia nad vrcholom v“. Ak $v_1, \ldots, v_n$ sú všetky bezprostredné nasledovníky vrchola v, tak zrejme platí:

$$A_v = A_{v_1} \cup \cdots \cup A_{v_n} \cup \{v_1, \ldots, v_n\} \tag{13}$$

Z rovnosti (13) vyplýva, na základe dôsledku 2.20, že ak A_v je nekonečná množina, tak existuje nasledovník v_i vrchola v taký, že A_{v_i} je tiež nekonečná množina.

Teraz ľahko dokážeme tvrdenie lemy: Nech x_0 je najmenší vrchol stromu T. Podľa predpokladu je množina $A_{x_0} = T \setminus \{x_0\}$ nekonečná. Teda existuje nasledovník x_1 vrchola x_0 taký, že A_{x_1} je nekonečná množina. Ak máme vrchol x_n taký, že množina A_{x_n} je nekonečná, tak existuje nasledovník $x_{n+1} > x_n$ vrchola x_n taký, že množina $A_{x_{n+1}}$ je nekonečná. Zrejme množina $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ je nekonečná vetva stromu T, čo bolo treba dokázať. □

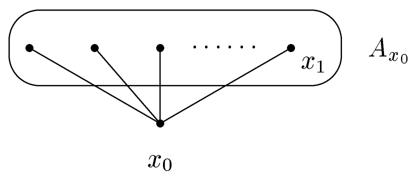
Veta 2.34. Nech každý vrchol konečného stromu T má stupeň vetvenia menší alebo rovný k. Ak T má aspoň $1 + \sum_{i=0}^{n-1} k^i$ vrcholov, tak v T existuje vetva dĺžky väčšej ako n.

Dôkaz: Pre každý vrchol $v \in T$ označíme $A_v = \{u \in T \mid v < u\}$, t.j. A_v je množina tých vrcholov stromu T, ktoré „ležia nad vrcholom v“. Nech $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sú všetky bezprostredné nasledovníky vrchola v. Potom zrejme platí

$$A_v = A_{v_1} \cup \ldots \cup A_{v_k} \cup \{v_1, \ldots, v_k\}$$

Nech x_0 je najmenší vrchol stromu T. Podľa predpokladu množina $A_{x_0} = T \setminus \{x_0\}$ má aspoň $\sum_{i=0}^{n-1} k^i$ prvkov.

Existuje teda taký nasledovník x_1 vrchola x_0, že A_{x_1} má aspoň $\frac{(1+k+k^2+\cdots+k^{n-1})-k}{k}$, t.j. aspoň $k + k^2 + \cdots + k^{n-2}$ prvkov (pozri obrázok 8). Ďalej existuje taký nasledovník x_2 vrchola x_1, že A_{x_2} má aspoň $k + k^2 + \cdots + k^{n-3}$ prvkov, atď., až dostávame, že existuje taký nasledovník x_{n-1} vrchola x_{n-2} taký, že $A_{x_{n-1}}$ má aspoň $k^{(n-1)-(n-1)}$ prvkov, teda obsahuje vrchol x_n. To znamená, že $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je vetva dĺžky väčšej ako n. □



Obr. 8. Obrázok k dôkazu vety 2.34

Poznámka 2.35. Podľa príkladu 2.30 tvrdenie poslednej vety nemôžeme zosilniť, t.j. existuje strom T s počtom vrcholov $1 + k + \cdots + k^{n-1}$ a vetvami maximálnej dĺžky n, ktorého vetvenie je pre každý vrchol najviac k.

Neplatí nasledujúca veta: V každom strome, ktorý má najviac $1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1}$ vrcholov a každý vrchol vetvenie najviac k, existuje vetva dĺžky väčšej ako n.

2.5. Ramseyove čísla

Vyjdeme z hlavolamu: Je pravda, že v spoločnosti, kde je aspoň 6 ľudí, existuje buď trojica ľudí, ktorí sa navzájom poznajú, alebo trojica ľudí, ktorí sa navzájom nepoznajú? Ako sme už povedali predtým, danej situácii môžeme priradiť diagram kompletného grafu o 6 vrcholoch, teda K_6 a úlohu hlavolamu formulovať ako farbanie hrán dvoma farbami. Zovšeobecnenia tejto úlohy budeme formulovať v jazyku teórie grafov. Za tým účelom uvedieme niekoľko potrebných definícii z teórie grafov.

Definícia 2.36. Nech V je konečná množina a $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$. Usporiadanú dvojicu $G = (V, E)$ nazývame *obyčajný (jednoduchý) graf*. V je *množina vrcholov* a E *množina hrán* grafu G.

Definícia 2.37. *Podgrafom* grafu $G = (V, E)$ nazývame graf $G' = (V', E')$ taký, že platí $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$, $E' \subseteq \mathcal{P}_2(V')$.

Definícia 2.38. *Kompletným grafom* o n vrcholoch nazývame graf, v ktorom $|V| = n$ a počet hrán je rovný $\binom{n}{2}$, teda $|E| = \binom{n}{2}$. Kompletný graf o n vrcholoch označujeme K_n.

Definícia 2.39. Nech $G = (V, E)$ je graf. *Komplementárnym grafom* ku grafu G nazývame graf $\bar{G}$, pre ktorý platí, že má tú istú množinu vrcholov V ako graf G a množinu hrán $E' = \{\{u, v\} \mid u, v \in$ $\in V, \{u, v\} \notin E\}$.

Definícia 2.40. Pod *stupňom* vrchola u v grafe G rozumieme mohutnosť množiny $\{v \mid v \in$ $\in V, \{u, v\} \in E\}$; toto číslo označujeme $\deg u$.

Poznámka 2.41. Ľahko možno nahliadnuť, že súčet stupňov všetkých vrcholov grafu G je rovný dvojnásobnému počtu hrán grafu.

Úlohu s hlavolamom môžeme zovšeobecniť nasledujúcim spôsobom: Majme $n \in \mathbb{N}^+$. Aké je najmenšie prirodzené číslo p, pre ktoré platí: každý graf, ktorý má aspoň p vrcholov alebo graf k nemu komplementárny, obsahuje K_n ako svoj podgraf? Ak ideme v zovšeobecňovaní ešte ďalej, dostávame sa k tzv. Ramseyovým číslam $R(n,m)$, ktoré sú definované ako najmenšie čísla, pre ktoré platí: každý graf G, ktorý má aspoň $R(n,m)$ vrcholov, buď obsahuje ako svoj podgraf K_n alebo k nemu komplementárny graf $\bar{G}$ obsahuje ako svoj podgraf K_m.

V jazyku farbenia hrán môžeme úlohu sformulovať nasledovne: Aké je najmenšie prirodzené číslo p, také že pre $m,n \in \mathbb{N}^+$ platí, že pri každom zafarbení hrán dvoma farbami (červenou a modrou) vždy existuje buď červený K_m, alebo modrý K_n ?

Rekurentný vzťah medzi Ramseyovými číslami našli Erdös a Szekeres.

Veta 2.42. Pre $m,n \geq 2$ platí

$$R(m,n) \leq R(m,n-1) + R(m-1,n) \tag{14}$$

Dôkaz: matematickou indukciou vzhľadom na veľkosť súčtu $m+n$.

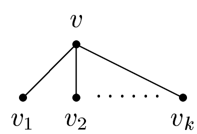
1° $m+n=4$, $m=n=2$: Má platiť $R(2,2) \leq R(2,1) + R(1,2)$, t.j. $2 \leq 1+1$.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre prirodzené čísla menšie ako $m+n$, dokážeme, že platí aj pre $m+n$. Nech teda náš graf má $R(m,n-1) + R(m-1,n)$ vrcholov a nech v je pevný vrchol grafu G. Budeme rozlišovať dva prípady:

(a) počet hrán incidujúcich s vrcholom v a zafarbených červenou farbou je aspoň $R(m-1,n)$.

(b) počet hrán incidujúcich s vrcholom v a zafarbených červenou farbou je menší ako $R(m-1,n)$.

V prípade (a) označíme $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vrcholy patriace koncom hrán zafarbených na červeno (pozri obrázok 9). Pritom platí $k \geq R(m-1,n)$. Ak uvažujeme graf na týchto k vrcholoch,



OBR. 9.

tak buď obsahuje červený K_{m-1} alebo modrý K_n. To vyplýva z definície Ramseyových čísel a indukčného predpokladu. Ak graf na k vrcholoch obsahuje červený K_{m-1}, tak pridaním vrchola v, ktorý je susedný so všetkými vrcholmi v grafe, ktorého všetky hrany sú červené, dostaneme červený K_m v grafe G. Ak graf na vrcholoch $\{v_1, v_2, \ldots v_k\}$ neobsahuje červený K_{m-1}, tak podľa indukčného predpokladu obsahuje modrý K_n, a teda aj celý graf obsahuje modrý K_n. Tvrdenie vety teda platí.

V prípade (b) musí byť počet hrán incidujúcich s v a zafarbených na modro aspoň $R(m,n-1)$ (lebo inak by bol súčet hrán zafarbených na modro a na červeno dohromady menší ako $R(m,n-1) + R(m-1,n) - 1$, čo ale nemôže nastať). To máme ale prípad analogický s prípadom (a), lenže „v modrom“. Teda analogickou úvahou ako v prípade (a) sa dá dokázať, že graf G obsahuje buď modrý K_n alebo červený K_m. Tým je dôkaz vety ukončený. □

Poznámka 2.43. Treba si uvedomiť, že veta nám zaručuje existenciu čísla $R(m,n)$ pre $m,n \geq 2$.

Poznámka 2.44. Ľahko možno nahliadnuť, že pre ľubovoľné prirodzené čísla $m,n \geq 2$ platí $R(m,2) = m$, $R(2,n) = n$. Z toho a rekurentného vzťahu (14) dostávame, že

$$R(3,3) \leq R(2,3) + R(3,2) = 3 + 3 = 6$$

Možno ukázať, že $R(3,3) > 5$, teda $5 < R(3,3) \leq 6$, čiže $R(3,3) = 6$.

Poznámka 2.45. V prípade, že $R(m-1,n) = 2p \wedge R(m,n-1) = 2q$, kde p,q sú prirodzené čísla, platí ostrá nerovnosť

$$R(m,n) < R(m,n-1) + R(m-1,n), \qquad m,n > 2$$

$n\backslash m$	2	3	4	5	6	7
2	2	3	4	5	6	7
3	3	6	9	14	18	23
4	4	9	18			

TABUĽKA 1. Príklady Ramseyových čísel

Dôkaz: Označme $r = 2p+2q-1$ a nech v je ľubovoľný vrchol kompletného grafu o r vrcholoch (teda K_r), n_1 počet červených hrán, ktoré incidujú s vrcholom v, a n_2 počet modrých hrán incidujúcich s vrcholom v. Potom platí rovnosť:

$$r - 1 = n_1 + n_2 = R(m-1, n) + R(m, n-1) - 2$$

Možné sú tri prípady:
(a) $n_1 \geq R(m-1, n) \ \wedge \ n_2 < R(m, n-1)$
(b) $n_2 \geq R(m, n-1) \ \wedge \ n_1 < R(m-1, n)$
(c) $n_1 = 2p - 1 \ \wedge \ n_2 = 2q - 1$

Prvé dva prípady sme uvažovali vo vete 2.42. Keby však prípad (c) nastal pre každý vrchol v, musel by každý z $2p+2q-1$ vrcholov incidovať s $2p-1$ červenými hranami. No potom by číslo $(2p+2q-1)(2p-1)$ muselo byť párne (súčet stupňov vrcholov grafu je vždy párne číslo). To ale neplatí, teda prípad (c) pre vhodne vybratý vrchol v nenastane. □

Rekurentnú nerovnosť (14) vo vete 2.42 možno použiť pri hľadaní horného odhadu pre Ramseyove čísla.

Veta 2.46. Pre $m, n \geq 2$ platí

$$R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{n-1}$$

Dôkaz: Dokazovaný vzťah platí, akonáhle aspoň jedno z čísel m a n sa rovná dvom. Skutočne: $R(m,2) = m \leq \binom{m}{m-1}$, $R(2,n) = n \leq \binom{n}{1}$. Predpokladajme, že vzťah platí pre všetky čísla m_1 a n_1, ktorých súčet je menší ako $m+n$ a dokážeme, že potom platí aj pre m a n. Podľa indukčného predpokladu platí:

$$R(m, n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-1}, \qquad R(m-1, n) \leq \binom{m+n-3}{m-2}$$

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

Použili sme tu známu identitu pre kombinačné čísla. Tým je dôkaz vety skončený. □

Uvedený odhad je dosť nepresný, ale má dôležitý teoretický význam: vieme, že $R(m, n)$ je vždy konečné číslo. Rôznymi kombinatorickými metódami možno nájsť lepšie odhady, ale od uvedeného sa líšia len nepodstatne. Nájsť presné hodnoty Ramseyových čísel je veľmi ťažká úloha a poznáme doteraz len niekoľko málo hodnôt. Niekoľko ich uvádzame v tabuľke 1.

Na záver sformulujeme uvedené výsledky vo vete.

Veta 2.47 (Ramseyova). Pre ľubovoľné prirodzené $m, n \geq 2$ existuje prirodzené číslo $R(m, n)$ také, že pre každé číslo $r \geq R(m, n)$ platí, že pri ľubovoľnom zafarbení hrán grafu K_r dvoma farbami v ňom existuje jednofarebný podgraf K_m ofarbený prvou farbou alebo jednofarebný podgraf K_n ofarbený druhou farbou.

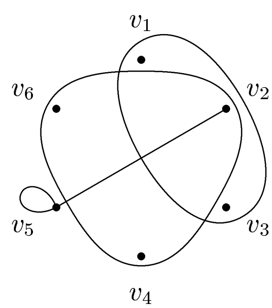
Poznámka 2.48. Napriek tomu, že Ramseyove čísla sa získavajú ťažko (aj ich odhady), problematika je živá, pretože pripúšťa veľa rozmanitých interpretácii a aplikácii. Študujú sa veľmi intenzívne rôzne zovšeobecnenia na rôznych štruktúrach.

2.6. *Ramseyova veta pre hypergrafy

Zovšeobecníme najprv pojem grafu na hypergraf a potom vyslovíme pre hypergrafy Ramseyovu vetu. V definícii 2.36 sme chápali hranu obyčajného grafu ako dvojprvkovú množinu jeho vrcholov. V hypergrafe pojem hrany zovšeobecníme na pojem *hyperhrany*, ktorá bude ľubovoľnou množinou vrcholov.

Definícia 2.49. *Hypergrafom* nazveme usporiadanú dvojicu $H = (V, E)$, kde V je konečná množina a $E \subseteq \mathcal{P}(V)$. Množinu V nazývame *množinou vrcholov* a množinu E *množinou hyperhrán* hypergrafu H.

Taká hypehrana $e \in E$, pre ktorú $|e| = 2$, je obyčajnou hranou. Hyperhranu $e \in E$, pre ktorú $|e| = 1$, možno chápať ako slučku, t.j. hranu ktorej oba koncové vrcholy sú stotožnené. Hyperhrany $e \in E$, pre ktoré $e \geq 3$, je však už problematické zakresliť názorne do obrázku. Ak to predsa potrebujeme urobiť, zvyčajne hyperhranu zakresľujeme tak, ako je zvykom „zakresľovať množinu vrcholov".



Obr. 10. Hypergraf $(\{v_1, v_2, \dots, v_6\}, \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_4, v_6\}, \{v_2, v_5\}, \{v_5\}\})$

Definícia 2.50. Hypergraf $H_1 = (V_1, E_1)$ nazveme *podgrafom* hypergrafu $H_2 = (V_2, E_2)$, ak $V_1 \subseteq$ $\subseteq V_2$ a $E_1 \subseteq E_2$.

Definícia 2.51. Nech $H = (V, E)$ je hypergraf a $V' \subseteq V$. Hypergraf H' taký, že $V(H') = V'$ a $E(H') = E(H) \cap \mathcal{P}(V')$ nazveme hypergrafom *indukovaným množinou* V'. Indukovaný hypergraf budeme označovať $H' = H \mid V'$.

Indukovaný hypergraf na množine vrcholov V' teda obsahuje všetky hyperhrany pôvodného hypergrafu, ktoré len môže.

Hypergraf $H = (V, E)$, v ktorom pre všetky hyperhrany $e \in E$ platí, že $|e| = k$, sa nazýva *k-uniformný*. Bolo by teda napríklad možné definovať obyčajný graf ako 2-uniformný hypergraf. k-Uniformný hypergraf, ktorý obsahuje všetky u-vrcholové hrany, sa nazýva *úplný k-uniformný hypergraf*. Úplný n-vrcholový k-uniformný hypergraf budeme označovať K_n^k. Platí teda napríklad, že $K_n^2 = K_n$.

Podobne ako hrany obyčajného grafu, aj hrany hypergrafov možno farbiť. Vyslovíme teraz o týchto farbeniach pomerne silnú verziu Ramseyovej vety.

Veta 2.52 (Ramseyova). Pre všetky $s, m, u \in \mathbb{N}^+$ existuje $n_0(k, m, s) \in \mathbb{N}^+$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ obsahuje hypergraf K_n^k pri ľubovoľnom zafarbení svojich hyperhrán s farbami jednofarebný podgraf K_m^k.

Dôkaz: Vetu dokážeme matematickou indukciou cez k. Aby sme zjednodušili vyjadrovanie, budeme úplný k-uniformný n-vrcholový hypergraf, ktorého hrany sú zafarbené s farbami označovať ako (k, n, s)-hypergraf.

1° Pre $k = 1$ obsahuje hypergraf K_n^k len slučky, a to na každom vrchole jednu (teda n slučiek). Máme teraz dokázať, že pre všetky prirodzené čísla s, m existuje také $n_0(1, m, s)$, že ak je počet slučiek n aspoň n_0, tak pri každom ich ofarbení s farbami z nich možno vybrať m, ktoré sú zafarbené tou istou farbou (t.j. jednofarebný hypergraf K_m^1). Na to stačí zvoliť

$$n_0 = (m-1)s + 1$$

Podľa Dirichletovho princípu sa totiž medzi takýmto počtom s farbami zafarbených slučiek už musí vyskytnúť m, zafarbených tou istou farbou.

2° Skôr než urobíme dôkaz pre $k \geq 2$, ukážeme si najprv jednu konštrukciu vychádzajúcu z hypergrafu $H = K_n^k$, ktorého každá hyperhrana je zafarbená niektorou z s zvolených farieb.

Pre každý vrchol $w \in V(H)$, kde $V(H)$ je množina vrcholov hypergrafu H, označme ako $H(w)$ úplný $(k-1)$-uniformný hypergraf na vrcholoch $V \setminus \{w\}$, ktorého hyperhrany sú zafarbené s farbami, a to tak, že každá hyperhrana $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ je pre $v_i \in V \setminus \{w\}$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ v hypergrafe $H(w)$ zafarbená rovnako ako hyperhrana $\{w, v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ v pôvodnom hypergrafe H. Skonštruujeme teraz postupnosť množín $\{V_i\}$ nasledovne:

Nech $V_0 = V(H)$ a ak už máme zostrojenú množinu V_{i-1} $(i \geq 1)$, zostrojíme množinu V_i takto: Zvolíme si ľubovoľný vrchol $x_{i-1} \in V_{i-1}$ a za V_i zvolíme čo do počtu prvkov najväčšiu množinu s vlastnosťami:

- $V_i \subseteq V_{i-1} \setminus \{x_{i-1}\}$
- Všetky hyperhrany hypergrafu $H(x_{i-1}) \mid V_i$ sú zafarbené tou istou farbou (túto farbu označme f_i).

Voľba vrchola x_{i-1} je teda v každom kroku ľubovoľná. Pretože množina $V = V_0$ je konečná a $V_i \subsetneq V_{i-1}$, tak po konečnom počte krokov dospejeme k prázdnej množine vrcholov. Postupnosť množín $V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_{p-1} \supsetneq V_p \supsetneq V_{p+1} = \emptyset$ nazveme *maximálnym reťazcom dĺžky p* v hypergrafe H.

Lema 2.53. Ak platí Ramseyova veta pre uniformitu $k-1$, tak pre všetky $s \in \mathbb{N}^+$ a $k \in \in \mathbb{N}_0$ existuje také $n_1 \in \mathbb{N}^+$, že pre všetky $n \geq n_1$ majú všetky maximálne reťazce každého (k, n, s)-hypergrafu dĺžku aspoň d (bez ohľadu na voľbu vrcholov x_i).[1]

Dôkaz: Predpokladajme, že Ramseyova veta platí pre uniformitu $k-1$ a všimnime si najprv, čo treba požadovať od množiny V_{i-1} $(i \geq 1)$, aby platilo, že $|V_i| \geq t$, kde t je ľubovoľne zvolené celé nezáporné číslo. Z Ramseyovej vety pre uniformitu $k-1$ vyplýva, že ak je $|V_{i-1}| \geq n_0(k,t,s)+1$, tak $|V_{i-1} \setminus \{x_{i-1}\}| \geq n_0(k,t,s)$, a preto v $(k-1, |V_{i-1}|-1, s)$-hypergrafe $H(x_{i-1}) \mid (V_{i-1} \setminus \setminus \{x_{i-1}\})$ existuje t-tica vrcholov taká, že indukuje hypergraf, ktorého hyperhrany sú všetky zafarbené tou istou farbou. Preto iste $|V_i| \geq t$. Ak pôjdeme v našich úvahách ešte o 1 krok hlbšie, tak podľa práve dokázaného obdobne dostávame, že ak $|V_{i-2}| \geq n_0(k-1, n_0(s,t,k-1)+1, s)+1$, tak $|V_{i-1}| \geq n_0(k-1,t,s)+1$, a preto $|V_i| \geq t$. Analogicky možno postupovať pre množiny V_{i-3}, V_{i-4}, atď. Zaveďme preto funkciu g:

$$\begin{aligned} g(s,t,k-1;0) &= t \\ g(s,t,k-1;r+1) &= n_0(k-1, g(s,t,k-1;r), s) + 1, \qquad r \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

kde $n_0(k-1, ., s)$ označuje nejaké (pre určitosť povedzme najmenšie) čísla n_0, ktorých existencia je zaručená platnosťou Ramseyovej vety pre počet farieb s a uniformitu $k-1$. Uvedené pozorovanie teraz možno sformulovať nasledovne:

Pre nezáporné celé čísla i, j také, že $j \leq i$, platí, že ak $|V_{i-j}| \geq g(s,t,k-1;j)$, tak $|V_i| \geq t$. Použijúc teraz toto tvrdenie pre $i = j = d$ a $t = 1$ dostávame, že ak $n = |V| = |V_0| \geq g(s,1,k-1;d)$, tak $|V_d| \geq 1$, t.j. $V_d \neq \emptyset$. Ak teda zvolíme $n_1 = g(s,1,k-1;d)$, tak pre $n \geq n_1$ bude mať každý maximálny reťazec každého (k,n,s)-hypergrafu dĺžku aspoň d. □

Teraz už môžeme dokázať Ramseyovu vetu pre $k \geq 2$: Indukčným predpokladom je platnosť Ramseyovej vety pre uniformitu $k-1$, a tak použijúc lemu 2.53 pre $d = (m-1)s+1$ dostávame existenciu čísla n_1 takého, že pre $n \geq n_1$ budú mať všetky maximálne reťazce (k,n,s)-hypergrafu H dĺžku aspoň $(m-1)s+1$. Zoberme ľubovoľný taký reťazec a v procese

[1] Neformálne možno povedať, že maximálne reťazce hypergrafu možno za uvedených podmienok spraviť ľubovoľne dlhými.

jeho konštrukcie zostrojenú postupnosť farieb $f_1, f_2, \dots, f_{(m-1)s+1}, \dots$ Keďže rôznych farieb je len s, tak podľa Dirichletovho princípu sa niektorá farba f musí v tejto postupnosti vyskytnúť aspoň m-krát, povedzme $f_{i_1} = f_{i_2} = \dots = f_{i_m} = f$ pre $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le (m-1)s+1$. Zodpovedajúce vrcholy x_i v procese konštrukcie zmieneného maximálneho reťazca sú pritom $x_{i_1-1}, x_{i_2-1}, \dots, x_{i_m-1}$. Preznačme tieto vrcholy na $y_1 = x_{i_1-1}$, $y_2 = x_{i_2-1}$, ..., $y_m = x_{i_m-1}$.

Uvažujme teraz hypergraf $G = H \mid \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Hypergraf G je zrejme úplný k-uniformný m-vrcholový. Pritom ak $\{y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}\}$ je pre $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ nejaká jeho hyperhrana, tak z konštrukcie reťazca platí, že $y_{j_2}, y_{j_3}, \dots, y_{j_k} \in V_{j_1}$. Hyperhrana $\{y_{j_2}, \dots, y_{j_k}\}$ je hyperhranou hypergrafu $H(y_{j_1})$. Podľa konštrukcie maximálneho reťazca je táto hyperhrana zafarbená farbou $f_{j_1} = f$. Podľa konštrukcie hypergrafu $H(y_{j_1})$ sú však hyperhrany $\{y_{j_2}, \dots, y_{j_k}\}$ v hypergrafe $H(y_{j_1})$ a $\{y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}\}$ v hypergrafe H, a teda aj G, zafarbené rovako.

Celkovo sú teda všetky hyperhrany hypergrafu G zafarbené tou istou farbou, a to farbou f. Za $n_0(k, m, s)$ teda možno zvoliť napríklad číslo $g(s, 1, k-1, (m-1)s+1)$, kde g je funkcia z lemy 2.53. $\square$

Poznámka 2.54. Najmenšie n_0, ktorého existenciu zaručuje Ramseyova veta 2.52, možno tiež nazvať „Ramseyovým číslom“ $R'(s, m, u)$. Vzťah medzi takýmto a obyčajným Ramseyovým číslom je potom $R'(2, m, 2) = R(m, m)$.

2.7. Systémy reprezentantov množín

Budeme rozoberať jeden z kombinatorických prístupov na charakterizovanie štruktúry konečných množín. Už z názvu možno vidieť, že základnou ideou je zámena systému množín — vybraním ich reprezentantov.

Formulácia úloh tohto typu a metódy ich riešenia závisia od toho, akým požiadavkám musia títo reprezentanti vyhovovať.

Nech $M = (S_1, \dots, S_m)$ je ľubovoľný systém konečných neprázdnych množín (niektoré množiny sa môžu aj opakovať). Ak systému M môžeme priradiť (nie nutne jednoznačne) výber $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ taký, že $a_i \in S_i$ $(i = 1, \dots, m)$, $a_i \ne a_j$ pre $i \ne j$ $(i, j = 1, \dots, m)$, hovoríme, že prvok a_i *reprezentuje* množinu S_i a celý výber $(a_1, \dots, a_m)$ sa nazýva *systémom rôznych reprezentantov pre* M. Ďalej poznamenávame, že ak $i \ne j$, potom $a_i \ne a_j$ aj v prípade, ak $S_i = S_j$. Ak sa teda množina vyskytuje v systéme niekoľkokrát, tak každý raz musí mať reprezentanta rôzneho od všetkých ostatných.

Nie je ťažké vidieť, že nie každý systém množín má systém rôznych reprezentantov. Ak však uvažujeme neprázdne množiny a po dvoch disjunktné, tak systém rôznych reprezentantov vždy existuje. Dokonca vieme spočítať, koľko takých rôznych systémov je.

Uvažujme zložitejší príklad: $S = \{a, b, c, d, e\}$, $M = (S_1, S_2, S_3, S_4)$, $S_1 = \{a, b, c, d\}$, $S_2 = \{a, b, e\}$. Potom existujú dva systémy rôznych reprezentantov: $\{c, a, b, e\}$ a $\{d, a, e, b\}$. Avšak, ak zameníme len jednu z množín, napríklad namiesto S_2 vezmeme $S_2' = \{b, e\}$, nedostaneme žiaden systém rôznych reprezentantov. Na otázku, či existuje systém rôznych reprezentantov pre daný systém množín dáva odpoveď veta Filipa Halla, dokázaná v roku 1935 a dávajúca nutnú a postačujúcu podmienku existencie reprezentantov.

Veta 2.55 (Hallova). Pre systém $M = (S_1, \dots, S_m)$ existuje m-tica navzájom rôznych reprezentantov práve vtedy, ak zjednotenie ľubovoľných k množín obsahuje aspoň k prvkov. Inými slovami, systém rôznych reprezentantov pre množiny $S_1, S_2, \dots, S_m$ existuje práve vtedy, ak $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \dots \cup S_{i_k}$ obsahuje aspoň k prvkov, pričom $k = 1, 2, \dots, m$ a $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$.

Dôkaz: ($\Longrightarrow$): Nutná podmienka je prakticky zrejmá, pretože existencia systému rôznych reprezentantov zabezpečuje prítomnosť nevyhnutného počtu prvkov ako rôznych reprezentantov.

($\Longleftarrow$): Dôkaz obráteného tvrdenia je zložitejší. Budeme postupovať indukciou vzhľadom na číslo m. Je zrejmé, že pre $m = 1$ tvrdenie platí. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre prirodzené čísla väčšie alebo rovné 1 a menšie ako m. Dokážeme, že platí aj pre m. Budeme uvažovať dva možné prípady.

- Spočiatku predpokladáme, že pre ľubovoľné $1 \leq k < m$ platí $|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \cdots \cup S_{i_k}| \geq k+1$, t.j. naša podmienka je splnená „s jedným nadbytočným prvkom". Potom, ak vezmeme ľubovoľnú množinu a vyberieme k nej ľubovoľného reprezentanta, pre ostatných $m-1$ množín zostáva platnou pôvodná podmienka. Podľa indukčného predpokladu existuje pre týchto $m-1$ množín systém rôznych reprezentantov. Týmto je prvá časť dôkazu ukončená.
- Predpokladajme teraz, že existuje k množín $k < m$, pre ktoré platí $|S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}| = k$. Podľa indukčného predpokladu týchto k množín má systém rôznych reprezentantov. Zostáva nám ešte $m-k$ množín, no ľubovoľné h z nich musia obsahovať aspoň h prvkov zo zostávajúcich, pretože v opačnom prípade týchto h množín spolu už s vybranými bude obsahovať menej ako $k+h$ prvkov, a to je v spore s predpokladom. Teda pre týchto $m-k$ množín je splnená počiatočná podmienka a podľa indukčného predpokladu majú systém rôznych reprezentantov. Dôkaz vety je ukončený. □

Poznámka 2.56. Podmienka konečnosti je tu dôležitá. Keby sme ju vypustili, tak napríklad pre nekonečný systém množín $S_0 = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $S_1 = \{1\}, \ldots, S_n = \{n\}, \ldots$ neexistuje systém rôznych reprezentantov, hoci ľubovoľná jeho časť ho má.

*Algoritmus na nájdenie systému rôznych reprezentantov

Majme systém konečných množín $(S_1, S_2 \ldots, S_n)$. Našou úlohou je nájsť preň systém rôznych reprezentantov.

Budeme najprv postupne voliť reprezentantov $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$, ... úplne ľubovoľne za predpokladu, že $a_i \neq a_j$ pre $i \neq j$. Keby sa nám týmto spôsobom podarilo dospieť až ku $a_n \in S_n$, máme systém $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ rôznych reprezentantov množín $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Predpokladajme teda, že máme vybraté prvky $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$, ..., $a_{k-1} \in S_{k-1}$ a ďalej už vo výbere nemožno pokračovať, t.j. pre všetky $x \in S_k$ by výber $a_k = x$ narušil podmienku o rôznosti jednotlivých a_i. Inými slovami, pre všetky $x \in S_k$ existuje $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ také, že $a_i = x$. Nech $S_k = \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$. Pokúsime sa preorganizovať výber doterajších reprezentantov a_i tak, aby jeden z prvkov v_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ mohol byť vybratý ako reprezentant pre množinu S_k (ak sa to dá). Konštrukcia bude nasledovná:

Najprv budeme induktívne konštruovať postupnosť $V = \{v_i\}_{i \geq 1}$. Jej prvých q členov už máme — sú to prvky množiny S_k. Postupne budeme jej prvky spracovávať odpredu a predlžovať ju dopisovaním prvkov na koniec. Zároveň s ňou budeme konštruovať postupnosti $N = \{n_i\}_{i \geq 1}$ a $P = \{p_i\}_{i \geq 1}$. Informácia, ktorú nesú čísla n_i a p_i sa bude týkať prvku v_i: číslo n_i bude označovať číslo množiny, vďaka ktorej sa prvok v_i dostal do postupnosti V a číslo p_i bude označovať poradové číslo terajšieho reprezentanta tejto množiny v postupnosti V. Na počiatku teda $n_1 = n_2 = \cdots = n_q = k$, avšak množina S_k zatiaľ reprezentanta vôbec nemá. Položíme preto definitoricky $p_1 = p_2 = \cdots = p_q = 0$.

Spracovanie prvku v_i teraz spočíva v nasledovnom: Zoberieme množinu S_j, ktorej reprezentantom je spracovávaný prvok v_i, ak taká množina existuje, a dopíšeme na koniec postupnosti V tie prvky množiny S_j, ktoré sa v postupnosti V ešte nenachádzajú. Im zodpovedajúce čísla v postupnosti N budú rovné j a príslušné čísla v postupnosti P budú rovné i. Ako sme už povedali, prvky postupnosti V sa spracovávajú odpredu a novopridané prvky sa pripisujú na jej koniec. Postupnosť V sa teda z algoritmického hľadiska správa ako dátová štruktúra — front.

Poznamenajme ešte, že voľba označenia v_i, n_i, p_i nie je náhodná. Celý postup totiž možno formulovať aj v jazyku teórie grafov. Postupne totiž konštruujeme špeciálny typ grafu — les. Pod *lesom* pritom rozumieme disjunktné zjednotenie konečného počtu stromov. Vrcholmi tohto stromu sú prvky postupnosti V. Pre každý vrchol v_i označuje p_i také číslo, že vrchol v_i je priamym nasledovníkom vrchola v_{p_i}, resp. $p_i = 0$, ak takýto vrchol neexistuje. To sa stane vtedy, keď je vrchol v_i koreňom niektorého stromu lesa. Ľahko teraz vidíme, že koreňmi stromov nášho lesa sú práve prvky množiny S_k.

Spracovanie vrchola v_i v tejto interpretácii znamená identifikovanie všetkých jeho priamych nasledovníkov a pripojenie ich do lesa. Pretože postupnosť V je spracovávaná ako front, konštruujeme vlastne uvedený les metódou „do šírky“. Čísla n_i pritom zužitkujeme až neskôr.

Všimnime si ešte, že platí $p_j < j$. Ak je totiž $1 \leq j \leq q$, tak $p_j = 0$ a nerovnosť platí triviálne a ak $j > q$, tak sa prvok v_j musel do postupnosti V dostať pri spracovávaní nejakého prvku v_i, ktorý v tom čase už musel v postupnosti V byť, t.j. $i < j$. V tomto prípade však $p_j = i$, a tak dostávame našu nerovnosť $p_j < j$.

Vráťme sa však k postupnosti V: Z jej konštrukcie vyplýva, že je prostá. Nie je teda možné, aby bola predlžovaná do nekonečna, keďže $V \subseteq \cup_{i=1}^{n} S_i$ a množiny S_i sú konečné. Nemožnosť pokračovať teda nastane v jednom z týchto prípadov:

(1) Prvky postupnosti V sa vyčerpali spracovaním posledného prvku postupnosti.

(2) Pri spracovávaní prvku v_i sa zistilo, že neexistuje množina S_j, ktorej by bol reprezentantom.

V grafovej interpretácii značí prípad (1), že les bol úplne skonštruovaný a prípad (2), že nie sme schopní identifikovať priamych nasledovníkov nejakého vrchola.

V prípade (1) systém rôznych reprezentantov neexistuje. Dokážeme to nasledovne: Nech má postupnosť V práve r prvkov, t.j. $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$. Keďže všetky prvky postupnosti V boli spracované, tak každý prvok tejto postupnosti je reprezentanotom nejakej množiny S_j. Z konštrukcie ale zároveň vyplýva, že ak bol v i-tom kroku spracovaný prvok v_i ako reprezentant množiny S_j, tak $S_j \subseteq V$ (všetky prvky množiny S_j, ktoré postupnosť V ešte neobsahovala, sme totiž dopísali na jej koniec). Ak sú teda $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_r}$ postupne množiny, ktorých reprezentanti sú $v_1, v_2, \ldots, v_r$, tak $S_{i_j} \subseteq V$ pre všetky $j = 1, 2, \ldots, r$. Keďže $S_k = \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$, $q \leq r$ a množina S_k zatiaľ reprezentanta nemá, tak $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_r}, S_k$ je $r+1$ množín (s rôznymi indexami), pre ktoré platí:

$$S_k \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{r} S_{i_j}\Big) \subseteq V = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$$

Máme teda $r + 1$ množín, ktoré majú v zjednotení nanajvýš r prvkov. Podľa Hallovej vety potom systém rozličných reprezentantov pre množiny $S_1, S_2, \ldots, S_n$ neexistuje.

V prípade (2) urobíme reorganizáciu doterajších reprezentantov $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ tak, aby bolo možné vybrať aj reprezenatanta pre množinu S_k. Nech teda prvky $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ postupnosti V už boli spracované a nech sa pri spracovávaní prvku v_m zistí, že neexistuje množina S_j, ktorej by bol nateraz reprezentantom. Zaveďme funkciu

$$\begin{aligned} f(0) &= m \\ f(j+1) &= p_{f(j)}, \qquad j \geq 0 \end{aligned}$$

a uvažujme postupnosť $\{f(i)\}_{i \geq 0}$. Už vieme, že $p_j < j$ pre $j \geq 1$. To v konečnom dôsledku značí, že postupnosť $\{f(i)\}$ je klesajúca. Je to však postupnosť prirodzených čísel, a tak musí byť konečná. Ide teda o $(t+1)$-prvkovú postupnosť $m = f(0) > f(1) > f(2) > \cdots > f(t) = 0$ (kým totiž nedosiahneme číslo 0, možno stále postupnosť predlžovať).

V grafovej interpretácii je význam postipnosti $\{f(i)\}$ nasledovný: postupnosť $v_{f(i)}$ je cesta C od vrchola v_m do koreňa stromu, v ktorom sa vrchol v_m nachádza.

Sme teraz pripravení reorganizovať výber reprezentantov a_i: zvolíme prvok $v_{f(i)}$ ako reprezentanta množiny $S_{n_{f(i)}}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ a ostatných reprezentantov necháme nepozmenených. Z konštrukcie je pritom zrejmé, že $v_{f(i)} \in S_{n_{f(i)}}$ a že novourčení reprezentanti sú navzájom rôzni. Povedané v termínoch teórie grafov: reprezentantov sme posunuli o jedno pozdĺž cesty C.

Všimnime si, že keďže $f(t) = 0$, tak $t < q$ a $n_{f(t)} = k$. Podarilo sa nám teda vhodnou úpravou výberu doterajších reprezentantov nájsť aj reprezentanta $a_{n_{f(t)}} = a_k$ množiny S_k.

Celý uvedený postup teraz opakujeme, až kým nakoniec nenájdeme aj reprezentanta a_n pre množinu S_n, resp. v tomto procese nezistíme, že systém rôznych reprezentantov pre množiny $S_1, S_2, \ldots, S_n$ neexistuje.

Uvedený algoritmus je zapísaný na obrázku 11.

Príklad 2.57. Algoritmus si teraz demonštrujeme na príklade: Nech $S_1 = \{1,4,5\}$, $S_2 = \{3,4,5\}$, $S_3 = \{1,4\}$, $S_4 = \{1,2\}$ a $S_5 = \{1,5\}$.

Riešenie: Zvoľme najprv náhodne $a_1 = 5$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$ a $a_4 = 2$. V tejto situácii už nemožno zvoliť $a_5 \in S_5$ tak, aby boli prvky a_i od seba rôzne. Postupnosti V, N a P skonštruované algoritmom sú v tabuľke 2. V našom prípade je $q = 2$. Prvok $v_4 = 3$ zatiaľ nie je reprezentantom

Popis	Pôvodné prvky množiny S_5	Spracovanie prvku v_1	Spracovanie prvku v_2 (nepribudol žiaden nový prvok)	Spracovanie prvku v_3 (nastal prípad (2))
v_i	$1,5$	4		3
n_i	$5,5$	3		2
p_i	$0,0$	1		3

TABUĽKA 2. Postupnosti $V = \{v_i\}$, $N = \{n_i\}$ a $P = \{p_i\}$.

žiadnej množiny, nastal teda prípad (2) pre $m = 4$. Všimnime si teraz ako sa budú reorganizovať reprezentanti:

- Prvok $v_4 = 3$ sa stane reprezentantom množiny $S_{n_4} = S_2$.
- Pretože $p_4 = 3$, ďalším reorganizovaným prvkom bude prvok $v_3 = 4$. Stane reprezentantom množiny $S_{n_3} = S_3$.
- Pretože $p_3 = 1$, ďalším reorganizovaným prvkom bude prvok $v_1 = 1$. Stane sa reprezentantom množiny $S_{n_1} = S_5$.

Číslo $p_1 = 0$, takže reorganizácia je ukončená. Ostatní reprezentanti (t.j. prvok 5 pre množinu S_1 a 2 pre S_4) zostanú zachovaní. Dostávame teda reprezentantov: $a_1 = 5$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$.

Königova veta

Teraz uvedieme jednu z aplikácii Hallovej vety: Maticu budeme nazývať ***binárnou***, ak jej prvky môžu nadobúdať len dve hodnoty: 0 alebo 1. ***Linkou*** matice nazveme jej ľubovoľný riadok alebo stĺpec. Hovoríme, že v binárnej matici súbor liniek ***pokrýva*** všetky jednotkové prvky, ak každá jednotka patrí aspoň do jednej linky súboru. Dve jednotky matice A nazývame ***nezávislé***, ak patria rôznym riadkom a rôznym stĺpcom.

Veta 2.58 (Königova). V ľubovoľnej binárnej matici je najväčší počet po dvoch nezávislých jednotkových prvkov rovný najmenšiemu počtu liniek, pokrývajúcich všetky jednotky.

Skôr ako dokážeme vetu 2.58, budeme ju ilustrovať na binárnej matici A. Všetky jednotkové prvky matice A sú pokryté druhým a štvrtým riadkom a tretím a šiestym stĺpcom, no súbory z troch liniek, pokrývajúce všetky jednotky v matici A nie sú. Ďalej sú v matici A viditeľné štyri nezávislé jednotkové prvky, pričom v A nie je päť nezávislých jednotiek.

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} & & \downarrow & & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Dôkaz Königovej vety: Najprv uvedieme niektoré označenia.

- $A = (a_{ij})$ — binárna matica rozmeru $n \times t$;
- m — minimálny počet liniek, obsahujúcich všetky jednotkové prvky matice A (minimálne pokrytie linkami);

VSTUP: Konečné množiny $S_1, S_2, \ldots, S_n$
VÝSTUP: Systém rôznych reprezentantov pre ne alebo informácia, že hľadaný systém neexistuje.

```
program SystemRoznychReprezentantov;
 begin
  for k := 1 to n do                                {voľba reprezentanta a_k ∈ S_k}
    begin
      Zvoľme reprezentanta a[k] ∈ S_k ľubovoľne tak, aby bol rôzny od všetkých a[i] pre
      i < k, ak je to možné. Ak to nie je možné, tak
        begin
          q := |S_k|;
          Nech {v[1], v[2], ..., v[q]} sú prvky množiny S_k;
          Nech n[1] = n[2] = ··· = n[q] = k;
          Nech p[1] = p[2] = ··· = p[q] = 0;
          r := q;                                   {r — počet prvkov v postupnosti {v_i}}
          m := 1;                     {m — index spracovávaného prvku postupnosti {v_i}}
          while (m ≤ q) and (existuje také j, že v[m] = a[j]) do
            begin
              u := |S_j \ {v[1], v[2], ..., v[r]}|;
              Nech v[r + 1], ..., v[r + u] sú prvky množiny S_j \ {v[1], v[2], ..., v[r]};
              Nech n[r + 1] = ··· = n[r + u] = j;
              Nech p[r + 1] = ··· = p[r + u] = m;
              r := r + u;
              m := m + 1;
            end;
          if m > r then                    {postupnosť {v_i} sa vyčerpala — prípad (1)}
            halt with failure — systém rôznych reprezentantov neexistuje;
          else                                  {príslušné j neexistuje — prípad (2)}
            begin
              i := m;
              while i > 0 do
                begin
                  a[n[i]] := v[i];
                  i := p[i];
                end;
            end;
        end;
    end;
  halt with success — systém rôznych reprezentantov je a[1], ..., a[n];
 end;
```

Obr. 11. Algoritmus na nájdenie systému rôznych reperezentantov

- $m = r + s$, kde s je počet stĺpcov a r počet riadkov, zúčastňujúcich sa na minimálnom pokrytí matice A;
- M je maximálny počet jednotiek, z ktorých žiadne dve nenežia na jednej a tej istej linke: ak označíme nejakým spôsobom tieto jednotky, potom každá z nich bude jediným označeným prvkom v tom riadku a stĺpci, na prieniku ktorých sa nachádza.

Potrebujeme dokázať, že $m = M$. Budeme dokazovať dve tvrdenia: $m \geq M$ a $M \geq m$.

($m \geq M$): Cez každý označený vrchol (jednotku) prechádzajú buď pokrývajúci riadok, buď pokrývajúci stĺpec, alebo dve linky (riadok a stĺpec) súčasne. Pretože však žiadna linka nemôže súčasne pokryť dve označené jednotky, tak $m \geq M$.

($M \geq m$): Na dôkaz druhej nerovnosti použijeme Hallovu vetu. Nech sa minimálne pokrytie skladá z r riadkov a s stĺpcov. Môžeme zameniť riadky a stĺpce takým spôsobom, aby uvedené linky boli prvými r riadkami a prvými s stĺpcami. Toto zamenenie riadkov a stĺpcov nemá vplyv na hodnoty M a m.

Prvým r riadkom bijektívne priradíme množiny $S_1, S_2, \dots, S_r$ (z Hallovej vety) takým spôsobom, že S_i, ($i = 1, 2, \dots, r$) sa skladá z tých hodnôt j, pre ktoré $a_{ij} = 1 \wedge j > s$. Inými slovami S_i je množina čísel stĺpcov (vynechávame prvých s stĺpcov), na ktorých prieniku s i-tym riadkom stoja jednotky.

Tvrdíme, že množiny $S_1, S_2, \dots, S_r$ vyhovujú podmienke Hallovej vety, lebo ak by k z týchto množín obsahovalo menej ako k (napr. $v < k$) prvkov, tak zodpovedajúcich k pokrývajúcich riadkov by bolo možné zameniť pokrývajúcimi stĺpcami a ako výsledok by sme dostali nové pokrytie, obsahujúce menej liniek ako to predtým. No to nie je možné v dôsledku predpokladu minimality m.

Z toho vyplýva, že množiny $S_1, S_2, \dots, S_r$ musia nutne spĺňať podmienku Hallovej vety, a preto musia mať r rôznych reprezentantov, t.j. takých r jednotiek v prvých r riadkoch a v posledných $t - s$ stĺpcoch, že žiadne dve z nich neležia na jednej a tej istej linke.

Ak uvažujeme analogicky, môžeme vybrať s jednotiek v prvých s stĺpcoch a v posledných $n - r$ riadkoch takých, že žiadne dve z nich neležia na jednej a tej istej linke.

Tým sme našli $m = r + s$ nezávislých jednotiek. Maximálny počet M nezávislých jednotiek nemôže byť menší ako nájdené množstvo m nezávislých jednotiek. Z toho vyplýva, že $M \geq m$ a veta je dokázaná. □

Ku každej binárnej matici môžeme priradiť ***bipartitný graf***, čo je taký obyčajný graf $G = (V, E)$, v ktorom $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1, V_2 \neq \emptyset$ (V_1, V_2 teda tvoria rozklad množiny V), pričom $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u \in V_1 \ \wedge \ v \in V_2\}$. Binárnej matici priradíme bipartitný graf nasledovne: Za množinu V_1 zvolíme riadky a za množinu V_2 stĺpce matice. Množina hrán bude $E = \{\{i, j\}$, pre ktoré platí $a_{ij} = 1\}$. Ak uvažujeme nezávislé jednotky v binárnej matici, tak v bipartitnom grafe im zodpovedajú ***nezávislé hrany***, t.j. také hrany, ktoré nemajú spoločný vrchol. Hovoríme, že vrchol v ***pokrýva*** hranu e, ak platí, že $v \in e$.

V jazyku teórie grafov potom možno Königovu vetu sformulovať takto:

Veta 2.59 (Königova). Minimálny počet vrcholov, pokrývajúcich všetky hrany bipartitného grafu, je rovný maximálnemu počtu nezávislých hrán.

Iné systémy reprezentantov množín

Úlohy o rozklade množín vedú k pojmu systému spoločných reprezentantov množín. Nech sú dané dva rôzne rozklady jednej a tej istej množiny S na n neprázdnych častí:

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \qquad S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$$

Ak existuje podmnožina O množiny S, ktorá má n prvkov, taká, že jej prienik s ľubovoľnou množinou, ktorá patrí k rozkladu, je neprázdny, t.j. $O \cap A_i \neq \emptyset$, $O \cap B_i \neq \emptyset$ ($i = 1, 2, \dots n$), tak množinu O nazývame ***systémom spoločných reprezentantov*** daných rozkladov. Pritom každý z prienikov, ako vidno, sa skladá z práve jedného prvku. Ak sa nám podarí popáriť (ak je to treba) množiny prvého a druhého rozkladu tak, že zodpovedajúce množiny majú práve jeden spoločný prvok, tak ho môžeme pokladať aj za ich spoločného reprezentanta.

Úlohu o spoločných reprezentantoch možno chápať aj širšie v tom zmysle, že nie je nutné, aby sa hľadali podmienky na existenciu len jedného spoločného prvku. Možno brať do úvahy rôzne podmienky na existenciu daného počtu spoločných prvkov, vopred zadanú množinu spoločných prvkov a podobne. Napríklad, ak je treba, aby každý prvok $s_i \in S$ vystupoval v systéme spoločných reprezentantov aspoň k_{1i}-krát a najviac k_{2i}-krát ($0 \leq k_{1i} \leq k_{2i}$), tak taký systém nazývame *systémom ohraničeného počtu reprezentantov*. Je zrejmé, že úloha o systéme rôznych reprezentantov, je špeciálnym prípadom takej úlohy pre $k_{1i} = 0$ a $k_{2i} = 1$. Iný špeciálny prípad je, keď

$$k_{1i} = \begin{cases} 1, & \text{pre } i = 1, 2, \dots, l \\ 0, & \text{pre } i = l+1, l+2, \dots, m \end{cases} \qquad k_{2i} = 1, \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, m$$

Nazýva sa úloha o existencii systému rôznych reprezentantov, obsahujúceho danú množinu *marginálnych* prvkov $s_1, s_2, \dots, s_l$.

Kritérium pre existenciu alebo neexistenciu systému spoločných reprezentantov je blízke kritériu pre systém rôznych reprezentantov.

Veta 2.60. Dva rozklady množiny

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$$

majú systém spoločných reprezentantov práve vtedy, ak zjednotenie ľubovoľných m z množín A_i má neprázdny prienik s aspoň m množinami B_j, kde $m = 1, 2, \dots, n$.

Dôkaz: Nutná podmienka, tak, ako aj v prípade systému rôznych reprezentantov, je zrejmá. Postačujúcu podmienku dokážeme tak, že ju jednoducho prevedieme na vetu o systéme rôznych reprezentantov.

Skutočne, pre každé B_i ($i = 1, 2, \dots, n$) vyberieme množinu S_i všetkých indexov $j \in K = \{1, 2, \dots, n\}$ takých, že $A_j \cap B_i \neq \emptyset$. Dostávame n-výber $M = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ podmnožín množiny K. Pre M existuje systém rôznych reprezentantov (sformulované kritérium existencie systému spoločných reprezentantov je kritériom existencie systému rôznych reprezentantov pre M). Výber rôznych reprezentantov dáva pre každé B_i svoje A_j, pričom ich prienik je neprázdny. V tomto prieniku môžeme vybrať aspoň jeden prvok, spoločný pre A_j a B_i, t.j. ich spoločného reprezentanta. $\square$

Poznatky o reprezentantoch množín a o systémoch reprezentantov nachádzajú v matematike mnoho rozmanitých aplikácií, napríklad sú to reprezentanti tried ekvivalencií. Metóda systémov reprezentantov sa používa aj v teórii sietí pri skúmaní prípustnosti tokov ako aj v teórii latinských štvorcov.

Obsah